ΤΑΣΟΣ ΑΝΘΟΥΛΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Για να περάσουν
οι μαθητές εύκολα από
τα μαθηματικά του δημοτικού
στα μαθηματικά του γυμνασίου

ΜΕ 500 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

Περιεχόμενα

Σελ.

Πρόλογος 13

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Το σύνολο και τα στοιχεία του 17

1. Η έννοια του συνόλου 17
2. Γραφή και καθορισμός συνόλου 17
3. Συμβολισμός του «είναι στοιχείο» 19
4. Μονοστοιχειακά σύνολα 20
5. Το κενό σύνολο 20
6. Ίσα σύνολα 20

   Ασκήσεις 21

Γραφική παράσταση συνόλου 23

1. Διαγράμματα του Βεν 23

   Άσκηση 24

Υποσύνολο συνόλου 25

1. Ορισμός 25
2. Ιδιότητες 26

Συνεπαγωγή και ισοδυναμία 28

1. Συνεπαγωγή 28
2. Ισοδυναμία 28

   Άσκηση 29

Ένωση και τομή συνόλων 30

1. Ένωση και τομή δύο συνόλων 30
2. Ειδικές περιπτώσεις 31
3. Ένωση και τομή τριών συνόλων 32
4. Ιδιότητες 33

   Ασκήσεις 33

Διαμερισμός συνόλου 35

   Ασκήσεις 35

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Εισαγωγή **39**

1. Οι αριθμοί 39
2. Σημασία των αρνητικών αριθμών 40
3. Απεικόνιση των πραγματικών αριθμών 42
4. Χρησιμοποίηση των γραμμάτων 42
   Ασκήσεις 43
5. Ίσοι και άνισοι πραγματικοί αριθμοί 43

Αλγεβρικό άθροισμα **44**

Ασκήσεις 47

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση των πραγματικών αριθμών **49**

1. Βασικός κανόνας του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης 49
   Ασκήσεις 50
2. Σημασία των παρενθέσεων 51
3. Ερμηνεία του κανόνα πολλαπλασιασμού των προσήμων 53
4. Αντίστροφοι αριθμοί 53
5. Ερμηνεία του κανόνα διαίρεσης των προσήμων 54
   Ασκήσεις 55
6. Γινόμενο πολλών παραγόντων 56
7. Πολλαπλασιασμός αριθμού επί άθροισμα 57
   Ασκήσεις 59
8. Πολλαπλασιασμός αθροίσματος επί άθροισμα 60
   Ασκήσεις 61
9. Κοινοί παράγοντες 62
   Ασκήσεις 62
10. Σημειώσεις πάνω στη διαίρεση 63
11. Άθροισμα κλασμάτων 64
12. Διαίρεση αθροίσματος διά αριθμού 65
13. Πολλαπλασιασμός αριθμού επί κλάσμα 65
14. Πολλαπλασιασμός κλάσματος επί κλάσμα 65
15. Διαίρεση γινομένου διά αριθμού 66
16. Απλοποίηση κλάσματος 66
17. Διαίρεση κλασμάτων 66
    Ασκήσεις 67

Δυνάμεις των πραγματικών αριθμών 70

1. Έννοια των δυνάμεων και συμβολισμός 70
   Ασκήσεις 70
2. Δυνάμεις αρνητικών αριθμών 71
   Ασκήσεις 71
3. Ύψωση ενός αριθμού στο τετράγωνο 72
4. Ύψωση ενός αριθμού στον κύβο 72
5. Γινόμενο δυνάμεων με βάση τον ίδιο αριθμό 72
6. Δύναμη άλλης δύναμης 73
7. Δύναμη γινομένου αριθμών 73
8. Δύναμη πηλίκου αριθμών 73
9. Πηλίκο δυνάμεων με βάση τον ίδιο αριθμό 74
10. Εκθέτης η μονάδα 74
11. Εκθέτης το μηδέν 74
12. Εκθέτης αρνητικός αριθμός 75
13. Δυνάμεις με βάση το μηδέν 75
    Ασκήσεις 75
14. Υπολογισμός των παραστάσεων $(\alpha+\beta)^2$, $(\alpha\text{-}\beta)^2$ 78
15. Υπολογισμός της παράστασης $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$ 78
16. Υπολογισμός των παραστάσεων $(\alpha+\beta)^3$, $(\alpha-\beta)^3$ 78
    Ασκήσεις 79

Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. 82

1. Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο 82
2. Μέγιστος κοινός διαιρέτης 83
   Ασκήσεις 84

Αριθμητική τιμή παράστασης 85

Ασκήσεις 85

Ισότητες 86

Ασκήσεις 88

Λόγοι και αναλογίες 89

1. Ορισμοί και παραδείγματα 89
2. Οι όροι της αναλογίας 90
3. Μέσος ανάλογος 91

Ασκήσεις 91
4. Κλίμακα 92
Ασκήσεις 93

Απόλυτες τιμές 94

Ασκήσεις 94

Ανισότητες 95

Ασκήσεις 97

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ: ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τρόποι γραφής των αριθμών 101

1. Ελληνική γραφή των αριθμών 101
2. Ρωμαϊκή γραφή των αριθμών 102
3. Αραβική γραφή των αριθμών 103

Ασκήσεις 103

Συστήματα αρίθμησης 104

1. Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης 104
2. Δωδεκαδικό σύστημα αρίθμησης 105
3. Δυαδικό σύστημα αρίθμησης 105

Ασκήσεις 106

Μονάδες μέτρησης 107

1. Μονάδες μήκους 107
2. Μονάδες επιφάνειας 107
3. Μονάδες όγκου 108
4. Μονάδες χωρητικότητας 108
5. Μονάδες βάρους 108
6. Μονάδες χρόνου 109

Ασκήσεις 109

Τόκος - Ανατοκισμός - Τοκοχρεωλύσιο 110

1. Τόκος 110

Ασκήσεις 111

2. Ανατοκισμός 112
Άσκηση 112
3. Τοκοχρεωλύσιο 113
Ασκήσεις 114

Μέσος όρος 115

Ασκήσεις 115

Αντί Επιλόγου (ή Οδηγιών)

Τα Μαθηματικά είναι πραγματικά για τόσο λίγους; 117

Πρόλογος

Τα τελευταία είκοσι χρόνια γίνονται συνεχείς αλλαγές στην ύλη των Μαθηματικών της τελευταίας τάξης του Δημοτικού σχολείου και της πρώτης τάξης του Γυμνασίου. Είναι φανερή η αμηχανία των υπευθύνων για τη σύνταξη των αντίστοιχων αναλυτικών προγραμμάτων (και, στη συνέχεια, των βιβλίων). Το *πρώτο ερώτημα*, στο οποίο καλούνται να απαντήσουν, είναι πού τελειώνει η (πρακτική) Αριθμητική και πού αρχίζει η Άλγεβρα. Το *δεύτερο ερώτημα* είναι σε ποιά ηλικία τα παιδιά θα αφήσουν την Αριθμητική και θα μπουν στην Άλγεβρα.

Η αδυναμία να απαντηθούν με σαφήνεια αυτά τα δύο βασικά ερωτήματα έχει οδηγήσει μέχρι τώρα σε Μαθηματικές και λογικές ακροβασίες, με συνέπεια τα Μαθηματικά να γίνονται ολοένα και πιο «δύσκολα» για τους μαθητές. Η «ύλη» αυξάνεται και αυξάνεται, χωρίς κανένα λόγο, μέσα σε μια προσπάθεια να φανεί πιο «επιστημονική» (ενώ στην πραγματικότητα γίνεται πιο αντιεπιστημονική και, φυσικά, πιό απωθητική).

Η βασική «μέθοδος» που χρησιμοποιείται είναι ο «εμπλουτισμός» της Αριθμητικής με στοιχεία της Άλγεβρας αποκομμένα από τον εννοιολογικό κορμό της.

Για παράδειγμα, αναφέρω την περιπέτεια της εισαγωγής των Μαθηματικών εξισώσεων στην έκτη τάξη του Δημοτικού. Αρχικά, έβαλαν τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις χωρίς τις ιδιότητες της ισότητας: κάθε μορφή πρωτοβάθμιας εξίσωσης λύνεται και με άλλον τύπο!... Χρειάστηκαν μερικά χρόνια για να αντιληφθούν ότι αυτή η εξωφρενική παρουσίαση των πρωτοβάθμιων εξισώσεων ήταν τελείως απαράδεκτη. Έτσι, πρόσθεσαν και τις ιδιότητες της ισότητας, χωρίς να προσθέσουν, όμως, και την έννοια των πραγματικών αριθμών (προφανώς γιατί θα έπρεπε να συνοδεύσουν αυτό το σύνολο των αριθμών με μια γενική εισαγωγή στην Άλγεβρα — πράγμα το οποίο φαίνεται πως είναι ανεπιθύμητο).

Τελικά, τα αποτελέσματα που έχουμε είναι δύο:

α) Τα Μαθηματικά, ολοένα και περισσότερο, χάνουν τη συνοχή και τη λογική τους και καταλήγουν να είναι μια σειρά ατέλειωτων τύπων και «περίεργων» λέξεων προς αποστήθιση.

β) Οι μαθητές πελαγοδρομούν σε επιμέρους (συνήθως ασήμαντα) θέματα και αδυνατούν να αντιληφθούν την ενότητα της Μαθηματικής λογικής.

Στόχος αυτού του βιβλίου είναι να βοηθήσει το παιδί που τελειώνει το Δημοτικό σχολείο να βάλει σε μια τάξη τις σκόρπιες (και πολλές φορές συγκεχυμένες και αβέβαιες) «γνώσεις» του και να προετοιμαστεί κατάλληλα για το Γυμνάσιο. Να απαλλαγεί από τις φοβίες που πιθανόν να έχει μπροστά στα σύμβολα, τους αριθμούς και τις πράξεις. Να σταματήσει να αποστηθίζει τύπους που δεν καταλαβαίνει και να αρχίσει να ενδιαφέρεται για την κατανόηση των εννοιών. Να γίνει ικανό να εφαρμόζει τις ιδιότητες των αριθμών, των πράξεων και των σχέσεων στις αντίστοιχες περιπτώσεις. Να έχει μια ολοκληρωμένη εικόνα των Μαθηματικών στο μυαλό του. Να μάθει να ψάχνει για να βρει εκείνα που του χρειάζονται. Να μπορεί να χρησιμοποιήσει τα Μαθηματικά με απλό και πρακτικό τρόπο.

Το βιβλίο γράφηκε έτσι, που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί, επίσης, και ως βιβλίο αναφοράς (τυπολόγιο) στις μεγαλύτερες τάξεις του Γυμνασίου, καθώς και στο Λύκειο.

Προσοχή: οι μαθητές δεν χρειάζεται να «αποστηθίσουν» κανέναν τύπο και καμιά τεχνική. Πρέπει να οδηγηθούν στο να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες, που σταδιακά μαθαίνουν, για τη λύση των ασκήσεων. (Το βιβλίο θα παραμένει ανοιχτό, δίπλα στον μαθητή, ώστε να ανατρέχει σ' αυτό κατά τη λύση των ασκήσεων). Στόχος μας θα πρέπει να είναι η κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων μέσα από τη χρήση τους για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που συναντούν.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Εισαγωγή στα Σύνολα

Το σύνολο και τα στοιχεία του

1. Η έννοια του συνόλου

Στην καθημερινή ζωή είναι συχνά απαραίτητο να θεωρήσουμε σαν ένα νέο αντικείμενο της σκέψης μας δύο ή περισσότερα ξεχωριστά αντικείμενα παρμένα μαζί. Π.χ. λέμε ο σύλλογος των καθηγητών του σχολείου μας και εννοούμε όλα μαζί τα πρόσωπα που διδάσκουν στο σχολείο μας. Λέμε η ποδοσφαρική ομάδα του τάδε χωριού και έχουμε στον νου μας όλους μαζί τους ποδοσφαιριστές που ανήκουν σ' αυτή την ομάδα. Μιλάμε για τη συλλογή γραμματοσήμων του δείνα συλλέκτη και εννοούμε όλα μαζί τα γραμματόσημα που ο συλλέκτης αυτός έχει μαζέψει.

Στα Μαθηματικά, όταν κάνουμε τέτοιους νοερούς συναθροισμούς αντικειμένων, χρησιμοποιούμε έναν ομοιόμορφο τρόπο έκφρασης: καλούμε κάθε συναθροισμό **σύνολο** και τα αντικείμενα που το συγκροτούν **στοιχεία** ή **μέλη του συνόλου**. Έτσι, για παράδειγμα, όταν θέλουμε να μιλήσουμε περιληπτικά για τα διάφορα ψηφία, με τα οποία γράφουμε τους ακέραιους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα γραφής, λέμε: το σύνολο που έχει στοιχεία τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Όμοια λέμε: το σύνολο των καθηγητών του σχολείου μας, το σύνολο των ποδοσφαιριστών που αποτελούν την τάδε ομάδα, το σύνολο των γραμματοσήμων του δείνα συλλέκτη.

2. Γραφή και καθορισμός συνόλου

Για να σημειώσουμε ένα σύνολο, που τα στοιχεία του μας είναι γνωστά, γράφουμε τα σύμβολά τους – ονόματα ή άλλα σημάδια τους – μέσα σε μια παρένθεση της μορφής { } που λέγεται **άγκιστρο**. Π.χ. το σύνολο που έχει στοιχεία τα φωνήεντα του ελληνικού αλφαβήτου σημειώνεται έτσι:

$$\{α, ε, η, ι, ο, υ, ω\}$$

Αν, για να μπορούμε ν' αναφερόμαστε με συντομία στο σύνολο αυτό, το ονομάσουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα, για παράδειγμα με το Φ, τότε γράφουμε την ισότητα:

$$Φ = \{α, ε, η, ι, ο, υ, ω\}$$

Το σύνολο αυτό καθορίστηκε με την αναγραφή των συμβόλων όλων των στοιχείων του μέσα στο άγκιστρο. Αυτός όμως ο τρόπος καθορισμού ενός συνόλου δεν είναι πρακτικός όταν το πλήθος των στοιχείων του συνόλου είναι κάπως μεγάλο.

Βέβαια, μπορούμε να συντομεύσουμε την αναγραφή των στοιχείων, αν αυτά παρουσιάζονται συνήθως με μια σειρά, με μια τάξη, που μας είναι οικεία. Π.χ. για το σύνολο Γ των γραμμάτων του αλφαβήτου μας μπορούμε να γράψουμε:

$$Γ = \{α, β, ..., ψ, ω\}$$

υποδηλώνοντας με τις τρεις ενδιάμεσες τελείες ότι παραλείψαμε τα ενδιάμεσα στοιχεία από τη σειρά των γραμμάτων του αλφαβήτου.

Επίσης, μπορούμε για το σύνολο Α των ακεραίων αριθμών να γράψουμε:

$$A = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

υποδηλώνοντας με τις τρεις τελευταίες τελείες ότι η σειρά των ακεραίων συνεχίζεται χωρίς τέρμα.

Ωστόσο, ο παραπάνω τρόπος καθορισμού ενός συνόλου είναι ανεφάρμοστος για τα περισσότερα σύνολα και τον αντικαθιστούμε με τον ακόλουθο. Π.χ. για το σύνολο Γ γράφουμε:

$$Γ = \{x \mid x \text{ γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου}\}$$

διαβάζοντας: *«Γ ίσον σύνολο των x, όπου x είναι γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου»*.

Έτσι και για το σύνολο Α γράφουμε:

$$A = \{x \mid x \text{ ακέραιος αριθμός}\}$$

Όπως βλέπουμε, το καθένα από τα δύο σύνολα καθορίζεται από

μια ιδιότητα των στοιχείων του συνόλου, που την έχουν όλα τα αντικείμενα που αποτελούν το σύνολο και μόνον αυτά.

Ο τρόπος αυτός του καθορισμού ενός συνόλου λέγεται **περιγραφή του συνόλου** και η χρησιμοποιούμενη ιδιότητα των στοιχείων του συνόλου λέγεται **χαρακτηριστική ιδιότητα του συνόλου**. Αφού περιγράψουμε ένα σύνολο Α με μια χαρακτηριστική ιδιότητά του, ένα οποιοδήποτε αντικείμενο είναι στοιχείο του Α, **όταν και μόνον όταν** έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα του Α.

Παρατήρηση 1

Μια ιδιότητα μπορεί τότε μόνο να θεωρηθεί χαρακτηριστική ιδιότητα ενός συνόλου όταν δεν αφήνει καμιά αμφιβολία για το αν οποιοδήποτε αντικείμενο την έχει ή δεν την έχει.

Π.χ. η ιδιότητα *«x είναι ωραίο ποίημα του αναγνωστικού μας»* δεν μπορεί να γίνει δεκτή σαν χαρακτηριστική ιδιότητα συνόλου, γιατί ένα ποίημα που μερικοί το θεωρούν ωραίο μπορεί να μην κρίνεται ωραίο από άλλους. Αντίθετα είναι δεκτή σαν χαρακτηριστική ιδιότητα συνόλου η ακόλουθη: *«x είναι ποίημα του αναγνωστικού μας με τέσσερις τουλάχιστον στίχους»*, επειδή καθορίζει με αναμφισβήτητο τρόπο ποιά ποιήματα του αναγνωστικού μας είναι στοιχεία του συνόλου και ποιά όχι.

Παρατήρηση 2

Τα στοιχεία ενός συνόλου είναι ανά δύο διαφορετικά. Επομένως, όταν αναγράφουμε τα ονόματα ή τα σύμβολά τους μέσα σε άγκιστρο, πρέπει κι αυτά να είναι διαφορετικά ανά δύο. Π.χ. το σύνολο $A = \{x \mid x$ ψηφίο του αριθμού $77101\}$ σημειώνεται με αναγραφή των στοιχείων του έτσι: $A = \{7, 1, 0\}$ και όχι έτσι: $A = \{7, 7, 1, 0, 1\}$

3. Συμβολισμός του *«είναι στοιχείο»*

Για να παραστήσουμε συμβολικά ότι ένα αντικείμενο α είναι στοιχείο ενός συνόλου Α, γράφουμε:

$$\alpha \in A$$

και διαβάζουμε με έναν από τους ακόλουθους τρόπους: *«α είναι στοιχείο του Α», «α ανήκει στο Α», «α περιέχεται στο Α».*

Για να δηλώσουμε ότι ένα αντικείμενο α δεν είναι στοιχείο ενός συνόλου Α, γράφουμε:

$$\alpha \notin A$$

και διαβάζουμε:

«α δεν είναι στοιχείο του Α», «α δεν ανήκει στο Α» ή «α δεν περιέχεται στο Α».

4. Μονοστοιχειακά σύνολα

Ας θεωρήσουμε την ιδιότητα *«x είναι φυσικός δορυφόρος της γης»*. Την ιδιότητα αυτή την έχει μονάχα η Σελήνη. Δηλαδή το σύνολο: {x | x φυσικός δορυφόρος της γης} είναι το μονοστοιχειακό σύνολο {Σελήνη}.

5. Το κενό σύνολο

Ας θεωρήσουμε τώρα την ιδιότητα *«x είναι μαθητής της τάξης μας απών σήμερα»* και ας υποθέσουμε πως ο έλεγχος των απουσιών έδειξε ότι κανένας μαθητής της τάξης μας δεν απουσιάζει σήμερα.

Άρα το σύνολο {x | x μαθητής της τάξης μας απών σήμερα} δεν έχει κανένα στοιχείο. Το σύνολο αυτό το λέμε κενό σύνολο και το συμβολίζουμε με { } ή $\varnothing$.

6. Ίσα σύνολα

Αν δύο σύνολα Α και Β έχουν τα ίδια **ακριβώς** στοιχεία, με άλλα λόγια αν **κάθε** στοιχείο του Α είναι στοιχείο του Β και **κάθε** στοιχείο του Β είναι στοιχείο του Α, τότε το Α λέγεται **ίσο** με το Β και γράφουμε $A = B$.

Ιδιότητες

Είναι φανερό ότι ισχύουν οι ιδιότητες:

α) Α = Α για κάθε σύνολο Α.

β) Αν Α = Β, τότε και Β = Α για οποιαδήποτε σύνολα Α, Β.

γ) Αν Α = Β και Β = Γ, τότε και Α = Γ για οποιαδήποτε σύνολα Α, Β, Γ.

Σημείωση

Αν δύο σύνολα Α, Β δεν είναι ίσα, τότε γράφουμε $A \neq B$ και διαβάζουμε «*Α διάφορο του Β*».

Παρατήρηση

$\{0\} \neq \varnothing$. Διότι το $\{0\}$ παριστάνει το μονοστοιχειακό σύνολο με στοιχείο το 0, ενώ το $\varnothing$ παριστάνει το κενό σύνολο.

Ασκήσεις

α) Να καθορίσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

Α = {x | x ημέρα της εβδομάδας}
Β = {x | x εποχή του έτους}
Γ = {x | x πρωτεύουσα της Γαλλίας}
Δ = {x | x αριθμός ακέραιος και διαιρέτης του 20}
Ε = {x | x μήνας με 27 ημέρες}

β) Να καθορίσετε με μια χαρακτηριστική ιδιότητα το καθένα από τα σύνολα:

Α = {Ανατολή, Δύση, Βοράς, Νότος}
Β = {2, 4, 6, 8, ...}
Γ = {11, 13, 15, 17, 19}

γ) Να εξετάσετε αν κάθε μια από τις παρακάτω ιδιότητες μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να χαρακτηρίσουμε ένα σύνολο και σε καταφατική περίπτωση ν' αναγράψετε τα στοιχεία του:

x είναι καλός μουσικός
x είναι μήνας που αρχίζει από Φ
x είναι μέρα της εβδομάδας που αρχίζει από Ε
x είναι νόστιμο γλύκισμα

δ) Δίνεται το σύνολο $A = \left\{2, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, 5\right\}$

Ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις είναι ψευδείς και γιατί;

$3 \in A$, $2 \in A$, $4 \notin A$, $5 \in A$, $\frac{1}{3} \in A$, $\frac{3}{5} \notin A$

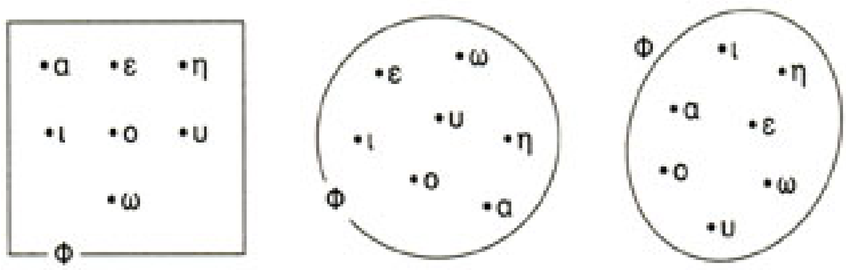
Γραφική παράσταση συνόλου

1. Διαγράμματα του Βεν

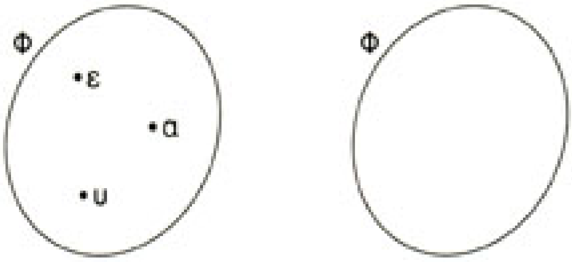
Η κατανόηση αυτών που θα πούμε για τα σύνολα ευκολύνεται με τη γραφική (σχηματική) παράστασή τους. Η γραφική παράσταση ενός συνόλου λέγεται **διάγραμμα του Βεν**. Η παράσταση αυτή μοιάζει με τον τρόπο που παριστάνουμε τις πόλεις μιας χώρας στον γεωγραφικό χάρτη.

Χαράζουμε στο χαρτί μας ένα περίγραμμα, δηλαδή μια κλειστή και χωρίς διασταυρώσεις γραμμή. Έτσι τα σημεία της επιφάνειας του χαρτιού μας χωρίζονται σε δύο σύνολα: Στο σύνολο των σημείων που βρίσκονται στο εσωτερικό του περιγράμματος και στο σύνολο των σημείων που βρίσκονται στο εξωτερικό του περιγράμματος.

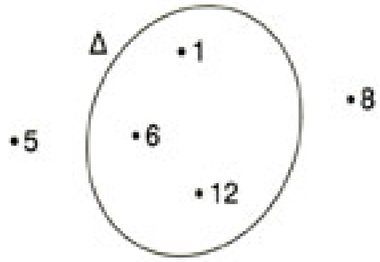
Τα στοιχεία του θεωρούμενου συνόλου τα παριστάνουμε με σημεία του εσωτερικού του περιγράμματος, σημειώνοντάς τα με κουκκίδες, κοντά στις οποίες γράφουμε τα σύμβολα των στοιχείων. Επάνω στο περίγραμμα, που μπορεί να έχει ένα οποιοδήποτε σχήμα, ή κοντά του, σημειώνουμε το όνομα του συνόλου. Π.χ. το σύνολο Φ = {α, ε, η, ι, ο, υ, ω} μπορεί να παρασταθεί γραφικά (σχηματικά) με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:



Συνήθως όμως, όταν μάλιστα τα στοιχεία του συνόλου είναι πολλά, σημειώνουμε μέσα στο περίγραμμα μερικά μόνο από τα στοιχεία του συνόλου ή και κανένα. Έτσι, το παραπάνω σύνολο Φ μπορεί να παρασταθεί γραφικά και με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:



Για να δηλώσουμε ότι ένα αντικείμενο δεν ανήκει σ' ένα σύνολο που παραστήσαμε γραφικά, σημειώνουμε μια κουκκίδα στο εξωτερικό του περιγράμματος και γράφουμε δίπλα το όνομα του αντικειμένου. Π.χ. για το σύνολο $\Delta = \{x \mid x$ διαιρέτης του $12\}$ οι προτάσεις: $1 \in \Delta$, $6 \in \Delta$, $5 \notin \Delta$, $8 \notin \Delta$, $12 \in \Delta$ σημειώνονται με τον παρακάτω τρόπο:



Άσκηση

Σημειώστε σ' ένα διάγραμμα του Βεν ενός συνόλου Σ κάθε μια από τις προτάσεις:

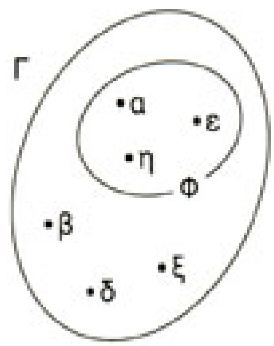
$\delta \notin \Sigma$, $\alpha \notin \Sigma$, $2 \in \Sigma$, $4 \in \Sigma$, $6 \in \Sigma$, $8 \in \Sigma$

Υποσύνολο συνόλου

1. Ορισμός

Τα στοιχεία του συνόλου
Φ = {x | x φωνήεν του ελληνικού αλφαβήτου}
είναι φανερό πως ανήκουν όλα και στο σύνολο
Γ = {x | x γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου}

Γι' αυτό καλούμε το Φ μέρος ή **υποσύνολο** του Γ. Σχηματικά αυτή η σχέση μεταξύ Φ και Γ μπορεί να παρασταθεί με το ακόλουθο σύνθετο διάγραμμα:



Άρα ένα σύνολο Α είναι υποσύνολο ενός συνόλου Β, **όταν και μόνον όταν** κάθε στοιχείο του Α είναι στοιχείο και του Β.

Η παραπάνω σχέση μεταξύ Α και Β συμβολίζεται με τη γραφή: $A \subset B$ που διαβάζεται: *«το Α είναι υποσύνολο του Β»* ή *«το Α περιέχεται στο Β»*.

Ας σημειωθεί ότι ο παραπάνω ορισμός επεκτείνει για τα Μαθηματικά τη σημασία που έχει η λέξη «μέρος» στην κοινή ομιλία, γιατί σύμφωνα με αυτόν ισχύουν τα εξής:

α) Κάθε σύνολο Σ είναι υποσύνολο του εαυτού του: $\Sigma \subset \Sigma$, επειδή κάθε στοιχείο του Σ είναι φυσικά στοιχείο και του Σ.

β) Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου Σ: $\varnothing \subset \Sigma$, γιατί δεν υπάρχει αντικείμενο που να ανήκει στο κενό σύνολο χωρίς να ανήκει και στο Σ.

Σημείωση

Ένα υποσύνολο Α του Β λέγεται **γνήσιο υποσύνολο** του Β, **όταν και μόνον όταν** υπάρχει κάποιο στοιχείο του Β που δεν ανήκει στο Α, με άλλα λόγια, όταν και μόνον όταν $A \subset B$ **και** $A \neq B$.

Παρατήρηση

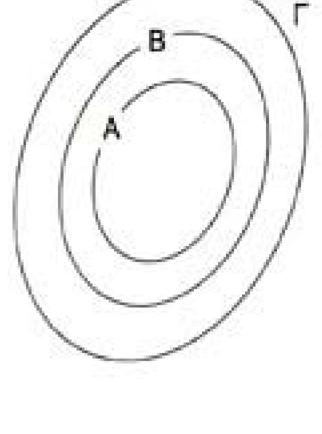
Οι σχέσεις *«Α είναι υποσύνολο του Β»* και *«α ανήκει στο Β»* έχουν διαφορετική σημασία. Η πρώτη είναι μια σχέση ανάμεσα σε δύο σύνολα, ενώ η δεύτερη φανερώνει ότι ένα αντικείμενο είναι στοιχείο ενός συνόλου.

2. Ιδιότητες

α) Αν $A \subset B$ και $B \subset \Gamma$, τότε και $A \subset \Gamma$.

Πραγματικά, αν ένα αντικείμενο x είναι στοιχείο του Α, τότε θα είναι στοιχείο και του Β, επειδή $A \subset B$, επομένως θα είναι στοιχείο και του Γ, αφού $B \subset \Gamma$.

Αυτό μπορούμε να το δούμε εύκολα αν κατασκευάσουμε το σύνθετο διάγραμμα που ανταποκρίνεται στις σχέσεις $A \subset B$ και $B \subset \Gamma$. Δηλαδή:



β) Αν $A \subset B$ και $B \subset A$, τότε $A = B$.

Πραγματικά, αν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B, και κάθε στοιχείο του B είναι στοιχείο του A, τότε τα σύνολα A και B περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία και κατά συνέπεια ταυτίζονται.

Συνεπαγωγή και ισοδυναμία

1. Συνεπαγωγή

Στα προηγούμενα διατυπώσαμε τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Αν $A = B$, τότε και $B = A$

β) Αν $A = B$ και $B = \Gamma$, τότε και $A = \Gamma$

γ) Αν $A \subset B$ και $B \subset \Gamma$, τότε και $A \subset \Gamma$

δ) Αν $A \subset B$ και $B \subset A$, τότε $A = B$

Κάθε μια απ' αυτές είναι σύνθετη από δύο προτάσεις: μια υπόθεση που εισάγεται με τη λέξη «**αν**» και ένα συμπέρασμα που εισάγεται με τη λέξη «**τότε**».

Μια τέτοια σύνθετη πρόταση ονομάζεται **συνεπαγωγή**. Γράφεται:

$A = B \Rightarrow B = A$

και σημαίνει πως η πρόταση $A = B$ έχει για συνέπεια (συνεπάγεται) την πρόταση $B = A$.

Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$(A = B$ και $B = \Gamma) \Rightarrow A = \Gamma$

$(A \subset B$ και $B \subset \Gamma) \Rightarrow A \subset \Gamma$

2. Ισοδυναμία

Ας συμβολίσουμε με τα γράμματα α και β τις προτάσεις:

α = ο Γιάννης είναι πατέρας του Πέτρου

β = ο Πέτρος είναι γιός του Γιάννη

Είναι φανερό πως ισχύουν οι δύο συνεπαγωγές:

$\alpha \Rightarrow \beta$ και $\beta \Rightarrow \alpha$

Τις συνοψίζουμε λοιπόν γράφοντας: $\alpha \Leftrightarrow \beta$

και λέμε ότι η πρόταση α είναι **ισοδύναμη** με τη β.

Γενικά, λέμε ότι μια πρόταση α είναι ισοδύναμη με μια πρόταση β,

όταν και μόνον όταν μαζί με τη συνεπαγωγή $\alpha \Rightarrow \beta$ αληθεύει και η αντιστροφή της $\beta \Rightarrow \alpha$. Γράφουμε τότε: $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

Ιδιότητες:

α) $\alpha \Leftrightarrow \alpha$

β) Αν $\alpha \Leftrightarrow \beta$, τότε και $\beta \Leftrightarrow \alpha$

γ) Αν $\alpha \Leftrightarrow \beta$ και $\beta \Leftrightarrow \gamma$, τότε και $\alpha \Leftrightarrow \gamma$

Άσκηση

Να βάλετε το κατάλληλο σύμβολο ($\Rightarrow$ ή $\Leftrightarrow$) μεταξύ των δύο προτάσεων στα παρακάτω ζεύγη:

1. α = μαθητής του Γυμνασίου μου
   β = μαθητής της τάξης μου
2. α = ο Γιώργος έχει εξάδελφο τον Γιάννη
   β = ο Γιάννης έχει εξάδελφο τον Γιώργο
3. α = ο x είναι ακέραιος με διαιρέτη το 9
   β = ο x είναι ακέραιος με διαιρέτη το 3
4. α = ο x δεν έχει διαιρέτη το 9
   β = ο x δεν έχει διαιρέτη το 3

Ένωση και τομή συνόλων

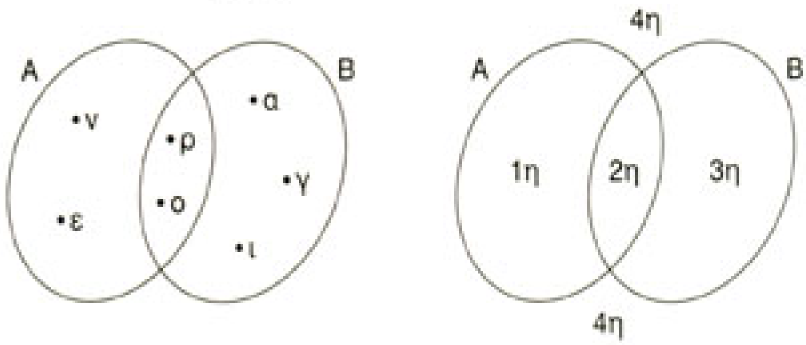
1. Ένωση και τομή δύο συνόλων

Ας πάρουμε τα δύο σύνολα:

A = {x | x γράμμα της λέξης «νερό»}

B = {x | x γράμμα της λέξης «αγόρι»}

Αν θέλουμε να τα παραστήσουμε θα πρέπει να κάνουμε το ακόλουθο σύνθετο διάγραμμα:



Δηλαδή τα δύο περιγράμματα πρέπει να τέμνονται, γιατί τα γράμματα ο και ρ ανήκουν και στα δύο σύνολα. Έτσι, σχηματίζονται 4 περιοχές:

1η Η περιοχή που βρίσκεται στο εσωτερικό του περιγράμματος A και στο εξωτερικό του B.

2η Η περιοχή που βρίσκεται στο εσωτερικό του B και στο εξωτερικό του A.

3η Η περιοχή που βρίσκεται στο εσωτερικό και των δύο περιγραμμάτων A και B.

4η Η περιοχή που βρίσκεται στο εξωτερικό και των δύο περιγραμμάτων A και B.

Όπως είναι φανερό, οι περιοχές 1, 2 και 3 μαζί παριστάνουν το σύνολο όλων των στοιχείων που περιέχονται στα σύνολα A και B. Το σύνολο αυτό λέγεται **ένωση** των συνόλων Α και Β και συμβολίζεται με τη γραφή:

$A \cup B$

που διαβάζεται: *«άλφα ένωση βήτα»*.

Επομένως: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ **είτε** $x \mid x \in B\}$

οπότε: $A \cup B = \{\nu, \varepsilon, \rho, o, \alpha, \gamma, \iota\}$

Η περιοχή 3 παριστάνει γραφικά το σύνολο των κοινών στοιχείων των δύο συνόλων Α και Β. Το σύνολο αυτό λέγεται **τομή** των συνόλων Α και Β και συμβολίζεται με τη γραφή:

$A \cap B$

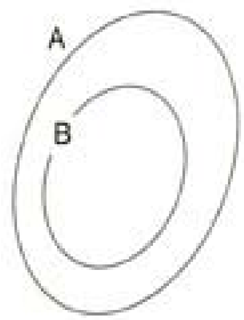
που διαβάζεται: *«άλφα τομή βήτα»*

Επομένως: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ **και** $x \mid x \in B\}$

οπότε: $A \cap B = \{\rho, o\}$

2. Ειδικές περιπτώσεις

α) Αν $B \subset A$, τότε από το διάγραμμα:

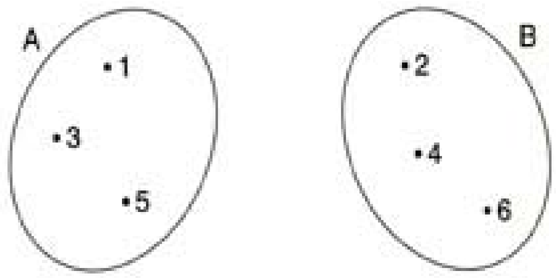


γίνεται φανερό πως:

$A \cup B = A$ και $A \cap B = B$

Παρατηρούμε επίσης πως υπάρχει ένα σύνολο που έχει τα στοιχεία του Α που δεν είναι στοιχεία του Β. Το σύνολο αυτό είναι η διαφορά του συνόλου Β ως προς το σύνολο Α και ονομάζεται **συμπλήρωμα** του Β ως προς Α. Συμβολίζεται: $\complement_A B$

β) Αν τα σύνολα Α και Β δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο τότε από το διάγραμμα:

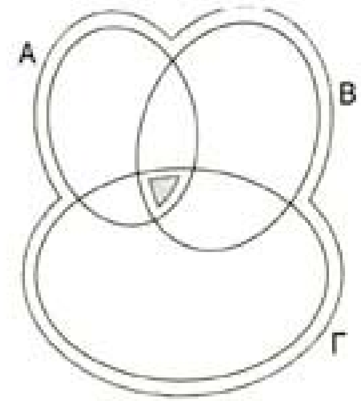


γίνεται φανερό πως:

$A \cup B = \{1, 3, 5, 2, 4, 6\}$ και $A \cap B = \varnothing$

Στην περίπτωση αυτή λέμε πως τα σύνολα Α και Β είναι **ξένα** μεταξύ τους.

3. Ένωση και τομή τριών συνόλων



Είναι φανερό με ποιόν τρόπο οι ορισμοί της ένωσης και της τομής δύο συνόλων μπορούν να επεκταθούν στην περίπτωση τριών ή περισσοτέρων συνόλων.

Έτσι για τρία οποιαδήποτε σύνολα Α, Β, Γ λέμε:

Ένωση $A \cup B \cup \Gamma$ των συνόλων Α, Β, Γ λέγεται το σύνολο των αντικειμένων που είναι στοιχεία ενός τουλάχιστον από τα σύνολα Α, Β, Γ (σημειώνεται με την εξωτερική γκρι γραμμή).

$A \cup B \cup \Gamma = \{x \mid x \in A$ είτε $x \mid x \in B$ είτε $x \mid x \in \Gamma\}$

Τομή $A \cap B \cap \Gamma$ των συνόλων Α, Β, Γ λέγεται το σύνολο των αντικειμένων που είναι στοιχεία και των 3 συνόλων Α, Β, Γ συγχρόνως (σημειώνεται με την εσωτερική γκρι περιοχή).

$A \cap B \cap \Gamma = \{x \mid x \in A$ και $x \mid x \in B$ και $x \mid x \in \Gamma\}$

4. Ιδιότητες

α) $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$

β) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ και $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να γίνουν εύκολα φανερές αν παραστήσουμε τα σύνολα Α, Β, Γ με τα διαγράμματα του Βεν.

Ασκήσεις

1. Από τα σύνολα:

   $A = \{x \mid x$ γράμμα της λέξης «ατμόπλοιο»$\}$ και

   $B = \{x \mid x$ γράμμα της λέξης «πολύτιμος»$\}$

   να σχηματίσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$, αφού πρώτα σχεδιάσετε το αντίστοιχο σύνθετο διάγραμμα.

2. Από τα σύνολα:

   $A = \{x \mid x$ ακέραιος και διαιρέτης του $12\}$ και

   $B = \{x \mid x$ ακέραιος και διαιρέτης του $6\}$

   να κατασκευάσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $C_B A$.

3. Να δικαιολογήσετε τις παρακάτω ισότητες, που ισχύουν για κάθε σύνολο Α:
$A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $C_A A = \varnothing$

4. Αφού παραστήσετε με σύνθετο διάγραμμα τα σύνολα:
$A = \{1, 2, 5, 7, 8, 9, 15\}$,
$B = \{1, 3, 6, 8, 10\}$ και
$\Gamma = \{1, 6, 7, 8, 12\}$
να σχηματίσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα $A \cup B \cup \Gamma$ και $A \cap B \cap \Gamma$.

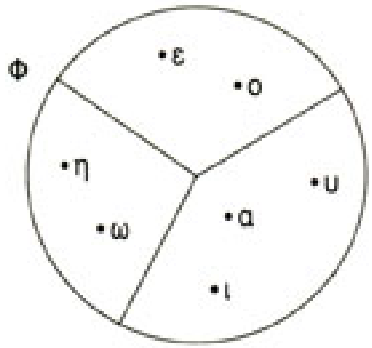
5. Αφού παραστήσετε με σύνθετο διάγραμμα τα σύνολα:
$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$,
$B = \{\gamma, \delta, \kappa, \lambda, \mu\}$ και
$\Gamma = \{\alpha, \beta, \varepsilon, \zeta\}$
να σχηματίσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα $A \cup B \cup \Gamma$, $A \cap B \cap \Gamma$, $(A \cup B) \cap \Gamma$ και $(A \cup \Gamma) \cap B$.

6. Να δικαιολογήσετε τις παρακάτω ιδιότητες με τη χρησιμοποίηση σύνθετων διαγραμμάτων:
$(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$
$(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$
και να τις επαληθεύσετε με τα σύνολα:
$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$,
$B = \{\beta, \delta, \zeta, \eta\}$ και
$\Gamma = \{\alpha, \beta, \theta, \eta\}$

Διαμερισμός συνόλου

Ας θεωρήσουμε το σύνολο Φ των φωνηέντων του ελληνικού αλφαβήτου. Το σύνολο αυτό κατανέμεται (διαμερίζεται) στα υποσύνολα Β, Μ, Δ των βραχέων, μακρών και διχρόνων φωνηέντων της αρχαίας ελληνικής γλώσσας.

Δηλαδή: $B = \{\varepsilon, o\}$, $M = \{\eta, \omega\}$, $\Delta = \{\alpha, \iota, \upsilon\}$



Τα υποσύνολα αυτά έχουν τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

α) κανένα δεν είναι κενό.

β) τα υποσύνολα ανά δύο είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή: $B \cap M = B \cap \Delta = M \cap \Delta = \varnothing$

γ) Η ένωση των τριών υποσυνόλων είναι ίση με το Φ, δηλαδή: $B \cup M \cup \Delta = \Phi$

Συμφωνούμε γι' αυτό να λέμε ότι το σύνολο Φ **διαμερίζεται** στα υποσύνολα Β, Μ, Δ ή ότι έχουμε ένα διαμερισμό του Φ στα μέρη του Β, Μ, Δ.

Ασκήσεις

1. Αν είναι Ε το σύνολο των ενοίκων μιας ορισμένης πολυκατοικίας σε μια ορισμένη στιγμή, να σκεφτείτε ένα διαμερισμό του συνόλου Ε.

2. Να ορίσετε ένα διαμερισμό του συνόλου των μαθητών του σχολείου σας.

3. Διατυπώστε με σύμβολα τις συνθήκες που **πρέπει και αρκεί** να ικανοποιούνται από τα σύνολα Β, Γ για να είναι το σύνολο $\mathscr{D} = \{B, \Gamma\}$ ένας διαμερισμός ενός συνόλου Α.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Άλγεβρα

Εισαγωγή

1. Οι αριθμοί

Οι πρώτοι αριθμοί που μαθαίνουμε είναι οι **φυσικοί αριθμοί** και το **μηδέν**. Φυσικοί αριθμοί είναι οι ακέραιοι αριθμοί 1, 2, 3, 4, ... (οι τελείες σημαίνουν πως μπορούμε να συνεχίσουμε τοποθετώντας στη σειρά τους αριθμούς χωρίς τέλος). Ονομάστηκαν φυσικοί αριθμοί γιατί εκφράζουν πλήθος συγκεκριμένων (φυσικών) αντικειμένων, π.χ. 3 δέντρα, 4 πορτοκάλια ή 8 σκύλοι. Ενώ δεν μπορούμε να μιλήσουμε για 2.5 λαγούς ή 6.75 άστρα. Το 2.5 και το 6.75 είναι **δεκαδικοί αριθμοί***. Επίσης, στους φυσικούς αριθμούς δεν περιέχεται το μηδέν. Ξέρουμε λοιπόν: το μηδέν, τους φυσικούς αριθμούς και τους δεκαδικούς αριθμούς.

Όλοι οι αριθμοί (εκτός από το μηδέν), με τους οποίους ασχοληθήκαμε ως τώρα ονομάζονται **θετικοί αριθμοί** και παριστάνονται με το σύμβολο της πρόσθεσης, π.χ. $+5$ ή $+3.6$.

Εκτός, όμως, από τους θετικούς αριθμούς υπάρχουν και οι **αρνητικοί αριθμοί**. Αυτοί είναι ακέραιοι ή δεκαδικοί αριθμοί και παριστάνονται με το σύμβολο της αφαίρεσης, π.χ. -5 ή -3.6.

Από δω και πέρα τα σύμβολα συν (+) και πλην (−) θα τα ονομάζουμε **πρόσημα**.

Το σύνολο που περιέχει τους θετικούς αριθμούς, τους αρνητικούς αριθμούς και το μηδέν, ονομάζεται σύνολο των **πραγματικών αριθμών**.

* Για τον συμβολισμό των δεκαδικών αριθμών θα χρησιμοποιούμε την τελεία (όπως γίνεται διεθνώς – και όπως υπάρχει στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές και στις αριθμομηχανές) και όχι το κόμμα.

Συμβολισμός

Θα συμβολίζουμε:

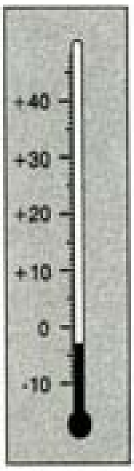
R = το σύνολο των πραγματικών αριθμών
R^+ = το σύνολο των θετικών αριθμών
R^- = το σύνολο των αρνητικών αριθμών
N = το σύνολο των φυσικών αριθμών
N_0 = το σύνολο των φυσικών αριθμών και του μηδενός
Z = το σύνολο των ακεραίων αριθμών
Z^+ = το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών
Z^- = το σύνολο των αρνητικών ακεραίων αριθμών

Εύκολα μπορούμε να δούμε πως ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$R^+ \subset R$	$R^- \subset R$	$0 \subset R$	$R = (R^+ \cup R^-) \cup \{0\}$
$Z \subset R$	$Z^+ \subset R$	$Z^- \subset R$	$Z = (Z^+ \cup Z^-) \cup \{0\}$
$N \subset N_0$	$Z^+ = N$		$N_0 = N \cup \{0\}$

2. Σημασία των αρνητικών αριθμών

Για να καταλάβουμε τη σημασία των αρνητικών αριθμών θα πούμε δύο παραδείγματα:



α) Πολλές φορές, τον χειμώνα, η θερμοκρασία κατεβαίνει κάτω από το μηδέν.

Π.χ. το θερμόμετρο που σχεδιάσαμε δίπλα δείχνει 3 βαθμούς κάτω από το μηδέν. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι η θερμοκρασία είναι −3 βαθμοί.

Αν ήταν καλοκαίρι και το θερμόμετρο έδειχνε 28 βαθμούς πάνω από το μηδέν, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η θερμοκρασία είναι +28 βαθμοί.

β) Όταν χορεύουμε, άλλοτε κάνουμε μερικά βήματα μπροστά και άλλοτε κάνουμε μερικά βήματα πίσω. Αν ορίσουμε θετικά τα βήματα προς τα εμπρός και αρνητικά τα προς τα πίσω, μπορούμε να πούμε ότι στον τάδε χορό χρειάζονται πρώτα +2, μετά −3 και τέλος +1 βήματα. Αυτό σημαίνει 2 βήματα προς τα εμπρός, 3 βήματα προς τα πίσω και 1 βήμα πάλι προς τα εμπρός.

(Το ίδιο και για βήματα αριστερά και δεξιά, αρκεί να ορίσουμε την κατεύθυνση προς την οποία γίνονται τα θετικά ή τα αρνητικά βήματα.)

Παρατηρήσεις

α) Όταν ένας αριθμός δεν έχει μπροστά του πρόσημο, τότε εννοείται πως έχει το +.
π.χ. ο αριθμός 7.3 είναι θετικός αριθμός.

β) Όταν δύο αριθμοί διαφέρουν μόνο ως προς το πρόσημο, λέγονται **αντίθετοι**.
π.χ. ο αντίθετος του +9 είναι ο −9 και αντίστροφα. Αυτό γράφεται:

$$-(+9) = -9$$
$$-(-9) = +9$$

δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{ll} -(+\alpha) = -\alpha & \\ & \alpha \in R \\ -(-\alpha) = +\alpha & \end{array}}$$

γ) Δύο ή περισσότεροι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο λέγονται **ομόσημοι**.
π.χ. οι αριθμοί +8, +103, +14.6 είναι ομόσημοι.
επίσης οι αριθμοί −9, −2, −7.4 είναι ομόσημοι.

Δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο λέγονται **ετερόσημοι**.
π.χ. οι αριθμοί +8 και −9 είναι ετερόσημοι.

3. Απεικόνιση των πραγματικών αριθμών

Τους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να τους παραστήσουμε (απεικονίσουμε) με τον ακόλουθο τρόπο: Πάνω σε μια ευθεία ορίζουμε ένα σημείο (το μηδέν). Κατόπιν εκλέγουμε μία από τις δύο διευθύνσεις ως θετική (οπότε η άλλη θα είναι αρνητική). Και τέλος εκλέγουμε την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ακεραίων (π.χ. 1 εκ.).

Η ευθεία αυτή ονομάζεται **άξονας**.

Φυσικά, μπορούμε να χωρίσουμε κάθε διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών ακεραίων αριθμών σε ίσα μέρη (10, 100, 1000, ...) ώστε να απεικονίσουμε και τους δεκαδικούς αριθμούς.

Έτσι, σε έναν τέτοιον άξονα μπορούμε να απεικονίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς (να δώσουμε, δηλαδή, την εικόνα τους).

4. Χρησιμοποίηση των γραμμάτων

Στην Άλγεβρα, εκτός από τους αριθμούς, χρησιμοποιούμε και τα γράμματα του αλφαβήτου.

Ένα γράμμα μπορεί να παραστήσει οποιονδήποτε αριθμό, π.χ. το γράμμα α μπορεί να είναι ο αριθμός 8 ή ο αριθμός 107.63 ή ο αριθμός −87 ή ο αριθμός 0 κλπ.

Συνήθως, όταν θεωρούμε πως ένας αριθμός μας είναι άγνωστος (δηλαδή ζητούμε να τον υπολογίσουμε από τα δεδομένα του προβλήματος), τον συμβολίζουμε με ένα από τα γράμματα x, y, z. Ενώ τους αριθμούς, που τους θεωρούμε γνωστούς, τους συμβολίζουμε με τα πρώτα γράμματα του ελληνικού αλφάβητου.

Παράδειγμα

Ο Γιάννης έδωσε στον Νίκο α δραχμές και στον Γιώργο β δραχμές. Πόσες δραχμές έδωσε συνολικά ο Γιάννης;

Σ' αυτό το πρόβλημα ζητούμε να βρούμε τις δραχμές που έδωσε συνολικά ο Γιάννης. Αυτό λοιπόν που ζητούμε το συμβολίζουμε με το x.

Οπότε θα είναι: $x = \alpha + \beta$

Αυτή είναι και η λύση του προβλήματος. Δηλαδή, ο Γιάννης έδωσε συνολικά $\alpha + \beta$ δραχμές ($\alpha, \beta \in R^+$)

Ασκήσεις

α) Να σκεφτείτε περιπτώσεις, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν θετικοί και αρνητικοί αριθμοί.

β) Να σκεφτείτε απλά προβλήματα, όπου αντί για αριθμούς να χρησιμοποιήσετε γράμματα.

5. Ίσοι και άνισοι πραγματικοί αριθμοί

Είναι γνωστό πως: $6 = 6$, $17 = 17$ κλπ.
Δηλαδή, ένας αριθμός είναι ίσος με τον εαυτό του.
Έτσι, λοιπόν, είναι: $+3 = +3$, $-8 = -8$ κλπ.

$$\boxed{\alpha = \alpha \qquad \alpha \in R}$$

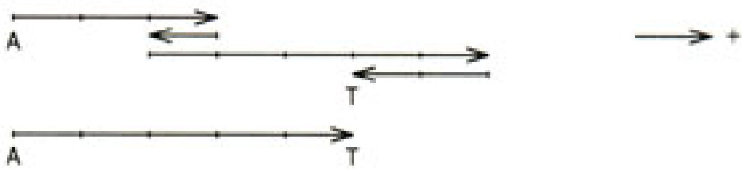
Αλλά $+4 \neq -4$ (που διαβάζεται: *«συν τέσσερα διάφορο του πλην τέσσερα»*). Για να καταλάβετε αυτό, σκεφτείτε πως δεν είναι το ίδιο να έχουμε θερμοκρασία 4 βαθμούς πάνω από το μηδέν και 4 βαθμούς κάτω από το μηδέν.

Φυσικά, είναι: $+3 \neq 0$, $+5 \neq +6$, $-7 \neq -13$ κλπ.

Αλγεβρικό άθροισμα

Ας παρακολουθήσουμε έναν άνθρωπο που περιμένει κάποιο φίλο του μπροστά σ' έναν κινηματογράφο. Επειδή ο φίλος του αργεί να φανεί, εκείνος βηματίζει στο πεζοδρόμιο μπρος-πίσω. Και κάνει με τη σειρά 3 βήματα μπροστά, 1 πίσω, 5 μπροστά και 2 πίσω. Θέλουμε, λοιπόν, να βρούμε πόσο μακριά από το σημείο που ξεκίνησε βρίσκεται τώρα.

Αν ορίσουμε σαν θετική την κίνηση προς τα εμπρός (οπότε η κίνηση προς τα πίσω θα είναι αρνητική), τότε το βάδισμα αυτού του ανθρώπου μπορεί να παρασταθεί όπως στο σχήμα:



Αν ονομάσουμε Τ το σημείο που τελικά σταμάτησε, τότε θα βρίσκεται σε μια απόσταση ΑΤ από το σημείο Α της αρχής. Αυτή η απόσταση θα βρεθεί αν προσθέσουμε όλα τα βήματα που έκανε:

$$(+3) + (-1) + (+5) + (-2)$$

Αυτό μπορούμε να το γράψουμε πιο απλά έτσι:

$+3 - 1 + 5 - 2$ δηλαδή:

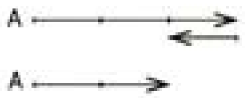
$$+(+\alpha) = +\alpha \qquad \alpha \in R$$
$$+(-\alpha) = -\alpha$$

Για να βρούμε με τι είναι ίση αυτή η παράσταση κάνουμε διαδοχικά τις παρακάτω πράξεις:

$+3 - 1 = +2$, $+2 + 5 = +7$, $+7 - 2 = +5$

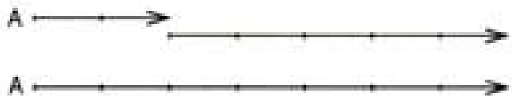
Αυτές τις πράξεις μπορούμε να τις παραστήσουμε έτσι:

α)



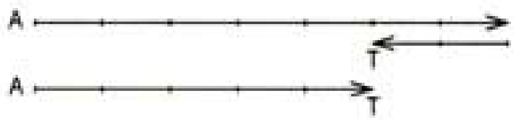
$+3-1=+2$

β)



$+2+5=+7$

γ)



$+7-2=+5$

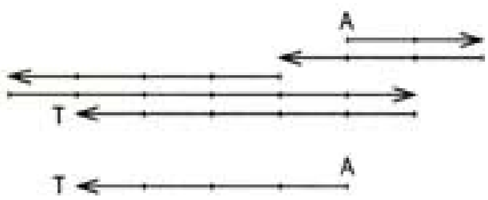
Επομένως είναι: $+3-1+5-2=+5$

Δηλαδή, εκείνος ο άνθρωπος βρίσκεται τώρα 5 βήματα μπροστά από το σημείο που ξεκίνησε. Αυτό είναι το **αλγεβρικό άθροισμα** των βημάτων που έκανε.

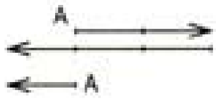
Από δω και πέρα, όταν λέμε πως προσθέτουμε έναν αριθμό σε έναν άλλο (ή σε περισσότερους) θα εννοούμε ότι τον προσθέτουμε αλγεβρικά. Δηλαδή, όταν πούμε να προσθέσουμε το -3 με το $+8$ θα γράψουμε:

$-3+8=+5$

Έστω τώρα πως θέλουμε να υπολογίσουμε το αλγεβρικό άθροισμα των βημάτων: $+2-3-4+6-5$



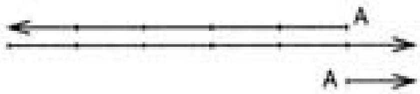
Αν εργαστούμε αναλυτικά θα έχουμε:

α) 

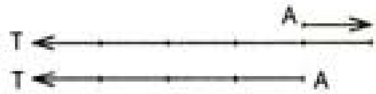
$+2-3=-1$

β) 

$-1-4=-5$

γ) 

$-5+6=+1$

δ) 

$+1-5=-4$

(Στον πρώτο αριθμό προσθέτουμε τον δεύτερο, στο άθροισμά τους τον τρίτο κλπ.)

Επομένως είναι: $+2-3-4+6-5=-4$

Δηλαδή, αυτός ο άνθρωπος θα βρεθεί 4 βήματα πίσω από το σημείο που ξεκίνησε.

Ιδιότητα 1 $\boxed{\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad \alpha, \beta \in R}$

Το αλγεβρικό άθροισμα δεν μεταβάλλεται αν αλλάξουν οι θέσεις των προσθετέων (μεταθετική ιδιότητα).

π.χ. $+3-1+5-2=+3-2-1+5=-2+5+3-1=+5$

Οι **προσθετέοι** του αλγεβρικού αθροίσματος λέγονται και **όροι** αυτού.

Παρατηρήστε μόνοι σας πως ισχύουν οι σχέσεις:

$(+5)+(+3)=(+3)+(+5) \qquad (+5)+(-3)=(-3)+(+5)$

$(-5)+(-3)=(-3)+(-5) \qquad (-5)+(+3)=(+3)+(-5)$

Ιδιότητα 2 $\boxed{\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \qquad \alpha \in R}$

Αν προσθέσουμε σε έναν αριθμό το μηδέν, θα πάρουμε σαν άθροισμα τον ίδιον αριθμό. π.χ.

$+4 + 0 = 0 + 4 = +4 \qquad -4 + 0 = 0 - 4 = -4$

$+4 - 0 = 0 + 4 = +4 \qquad -4 - 0 = 0 - 4 = -4$

Παρατήρηση

Το αλγεβρικό άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι ίσο με το μηδέν. π.χ.

$+3 - 3 = -3 + 3 = 0$ $\boxed{\alpha - \alpha = 0 \qquad \alpha \in R}$

Ασκήσεις

α) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αλγεβρικά αθροίσματα (με τη βοήθεια γραφικής παράστασης των αριθμών σε χαρτί μιλιμετρέ):

1) $+4 - 1 + 3$ 2) $+2 - 1 - 3$
3) $-3 + 4 + 2$ 4) $+2 + 4 + 1 + 3$
5) $-3 - 1 - 2$ 6) $+2 - 3 - 4$
7) $-4 + 3 - 2$ 8) $+3 - 4 + 2 - 1$
9) $+5 - 2 + 1$ 10) $+3.2 + 1.4 - 2.3$
11) $-1.7 + 2.4 - 1.3$ 12) $-2.3 - 4.1 - 1.8$
13) $+1.8 + 2.3 + 3.7$ 14) $+1.2 - 3.8 + 2.1$
15) $-3.7 + 1.2 + 4.1$

β) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αλγεβρικά αθροίσματα (χωρίς γραφική παράσταση):

1) $-4 + 1 + 3$ 2) $+3 - 4 - 2$
3) $+3 + 1 + 2$ 4) $-3 + 4 - 2 + 1$

5) $-2+1+3$
6) $+4-3+2$
7) $-2+3+4$
8) $-2-4-1-3$
9) $-5+2-1$
10) $-1.2+3.8-2.1$
11) $-1.8-2.3-3.7$
12) $+3.7-1.2-4.1$
13) $+1.7-2.4+1.3$
14) $+2.3+4.1+1.8$
15) $-3.2-1.4+2.3$

Σημείωση: Να συνεχίσετε με δικούς σας αριθμούς μέχρι να καταλάβετε καλά τον τρόπο υπολογισμού και να αποκτήσετε ευχέρεια στις πράξεις.

γ) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αλγεβρικά αθροίσματα, αφού πρώτα χωριστούν οι θετικοί και οι αρνητικοί αριθμοί.

π.χ. $+4-2+3-1=\underbrace{+4+3}\underbrace{-2-1}=+7-3=+4$

1) $-4+3-1+7$
2) $+4-7+2-1$
3) $+8-2+3-4$
4) $-2.3+7.8-1.2$
5) $+4.3-5.2+3.7$
6) $-4.8+3.1-1.7$

δ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$ αν:

1) $\alpha=+2 \quad \beta=+3 \quad \gamma=+5$
2) $\alpha=+2 \quad \beta=+3 \quad \gamma=-5$
3) $\alpha=+2 \quad \beta=-3 \quad \gamma=+5$
4) $\alpha=+2 \quad \beta=-3 \quad \gamma=-5$
5) $\alpha=-2 \quad \beta=+3 \quad \gamma=+5$
6) $\alpha=-2 \quad \beta=+3 \quad \gamma=+5$
7) $\alpha=-2 \quad \beta=+3 \quad \gamma=-5$
8) $\alpha=+2 \quad \beta=-3 \quad \gamma=+5$
9) $\alpha=+2 \quad \beta=0 \quad \gamma=+5$
10) $\alpha=+2 \quad \beta=0 \quad \gamma=-5$

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση των πραγματικών αριθμών

1. Βασικός κανόνας του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης

Το γινόμενο (ή το πηλίκο) δύο **ομόσημων** αριθμών είναι **θετικός** αριθμός.

Το γινόμενο (ή το πηλίκο) δύο **ετερόσημων** αριθμών είναι **αρνητικός** αριθμός.

Δηλαδή:

$$(+2)\cdot(+6)=+12 \qquad (+2)\cdot(-6)=-12$$
$$(-2)\cdot(-6)=+12 \qquad (-2)\cdot(+6)=-12$$

$$\frac{(+15)}{(+5)}=+3 \qquad \frac{(+15)}{(-5)}=-3$$
$$\frac{(-15)}{(-5)}=+3 \qquad \frac{(-15)}{(+5)}=-3$$

Αυτόν τον κανόνα θα μπορούσαμε να τον συμβολίσουμε και έτσι:

$$(+)\cdot(+)=(+) \qquad (+)\cdot(-)=(-)$$
$$(-)\cdot(-)=(+) \qquad (-)\cdot(+)=(-)$$

$$\frac{(+)}{(+)}=(+) \qquad \frac{(+)}{(-)}=(-)$$
$$\frac{(-)}{(-)}=(+) \qquad \frac{(-)}{(+)}=(-)$$

Σημείωση

Από δω και πέρα για σύμβολο του πολλαπλασιασμού θα χρησιμοποιούμε μια τελεία ανάμεσα στους παράγοντες του γινομένου.

π.χ. $(+3) \cdot (-9)$, $\alpha \cdot \beta$

Την τελεία αυτή μπορούμε, όταν δεν υπάρχει φόβος να δημιουργηθεί σύγχυση, να την παραλείψουμε.

π.χ. $\alpha\,\beta$ (που σημαίνει α επί β)

Για σύμβολο της διαίρεσης θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο του κλάσματος.

π.χ. $\frac{\alpha}{\beta}$ (που σημαίνει α διά β)

Ασκήσεις

α) Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

1) $(+5) \cdot (+4)$ 2) $(+6) \cdot (+8)$

3) $(+6) \cdot (-5)$ 4) $(-7) \cdot (+9)$

5) $(+8) \cdot (-4)$ 6) $(-15) \cdot (-3)$

7) $(-4) \cdot (+12)$ 8) $(+2.1) \cdot (-3.2)$

9) $(-4.3) \cdot (-5)$

β) Να υπολογιστούν τα πηλίκα:

1) $\frac{+8}{+4}$ 2) $\frac{+6}{-2}$ 3) $\frac{-10}{+5}$

4) $\frac{-12}{+3}$ 5) $\frac{-18}{-6}$ 6) $\frac{-48}{+6}$

7) $\frac{+7}{-5}$ 8) $\frac{-7.5}{-3}$

γ) Να αλλάξετε τα πρόσημα στα παρακάτω γινόμενα και πηλίκα έτσι, ώστε να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

π.χ. $(+3)\cdot(+2) = (-3)\cdot(-2) = +(2\cdot 3) = +6$

$$\frac{+4}{-2} = \frac{-4}{+2} = -\frac{4}{2} = -2$$

1) $(+3)\cdot(-5)$	2) $(+2)\cdot(+4)$	3) $(-2)\cdot(-8)$
4) $(-2.1)(+3)$	5) $(-1.7)(-2.4)$	6) $(+3)(+4.2)$
7) $\frac{+12}{-3}$	8) $\frac{-8}{-4}$	9) $\frac{-7}{+5}$
10) $\frac{+10}{-5}$	11) $\frac{-6}{+2}$	12) $\frac{+18}{+6}$

2. Σημασία των παρενθέσεων

Οι παρενθέσεις χρησιμεύουν για δύο λόγους:

Είτε για να αποφύγουμε λάθη στις πράξεις, για παράδειγμα όταν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε το -2 επί το -3 γράφουμε

$(-2)\cdot(-3)$ και όχι $-2\cdot-3$

που μπορεί αργότερα να νομίσουμε πως είναι το αλγεβρικό άθροισμα $-2\ -3$.

Είτε για να δείξουμε πως η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση υπολογίζεται ιδιαίτερα.

π.χ. $(-3)\cdot(+6-2) = (-3)\cdot(+4) = -12$

Για τον ίδιο λόγο χρησιμοποιούμε και τις αγκύλες.

π.χ. $(-2)\cdot[(+7-8)+(+5-1)] = (-2)\cdot(-1+4) =$
$= (-2)\cdot(+3) = -6$

Η παράσταση $(-2) \cdot [(+7-8)+(+5-1)]$ σημαίνει πως πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το -2 επί το άθροισμα των αριθμών $(+7-8) = -1$ και $(+5-1) = +4$.

Παραδείγματα

1) $(+4-1) \cdot (+2+3-7) = (+3) \cdot (-2) = -6$

2) $(+2) \cdot [+3+(+6-2)] = (+2) \cdot [+3+(+4)] =$
$= (+2) \cdot (+3+4) = (+2) \cdot (+7) = +14$

3) $(+4) \cdot [+8-(+3+2)] = (+4) \cdot [+8-(+5)] =$
$= (+4) \cdot (+8-5) = (+4) \cdot (+3) = +12$

4) $(-3)\,[(+3-4)-(+3+1)] = (-3)\,[-1-(+4)] =$
$= (-3)\,(-1-4) = (-3)\,(-5) = +15$

5) $(3-1)\,(3-2+4) = 2 \cdot 5 = 10$

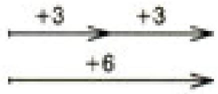
6) $4\,[(3-4)-(2+3)] = 4\,(-1-5) = 4\,(-6) = -24$

7) $[3-(2-1)] \cdot [-(4-2)-(3-8)] =$
$= (3-1)\,(-2+5) = 2 \cdot 3 = 6$

8) $(-2)\,[3\,(4-1)-2\,(2-3)] = -2\,[3 \cdot 3-2\,(-1)] =$
$= -2\,(9+2) = -2 \cdot 11 = -22$

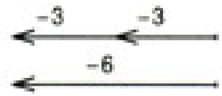
3. Ερμηνεία του κανόνα πολλαπλασιασμού των προσήμων

α) $(+2) \cdot (+3) = +6$



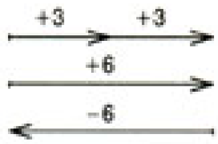
Είναι το ίδιο με το +3 +3 = +6
(δύο φορές το +3 κάνει +6)

β) $(+2) \cdot (-3) = -6$



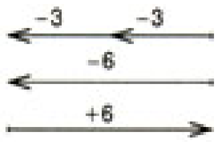
Είναι το ίδιο με το −3 −3 = −6
(δύο φορές το −3 κάνει −6)

γ) $(-2) \cdot (+3) = -6$



Είναι το αντίθετο από το +3 +3 = +6
Είναι δηλαδή: − (+3 +3) = − (+6) = −6
(πλην δύο φορές το +3 κάνει −6)

δ) $(-2) \cdot (-3) = +6$



Είναι το αντίθετο από το −3 −3 = −6
Είναι δηλαδή: − (−3 −3) = − (−6) = +6
(πλην δύο φορές το −3 κάνει +6)

4. Αντίστροφοι αριθμοί

Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι αν το γινόμενό τους είναι ίσο με το +1. Π.χ. οι αριθμοί +3 και + 1/3 είναι αντίστροφοι γιατί:

$(+3) \cdot (+\frac{1}{3}) = +1$

το ίδιο οι αριθμοί −4 και −1/4 διότι: $(-4)\cdot(-\frac{1}{4})=+1$

το ίδιο οι αριθμοί −2/3 και −3/2 διότι: $(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{3}{2})=+1$

Δηλαδή, δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι όταν είναι ομόσημοι και ο αριθμητής του πρώτου είναι παρονομαστής του δεύτερου, ενώ ο παρονομαστής του πρώτου είναι αριθμητής του δεύτερου.

Σκεφτείτε πως και οι ακέραιοι αριθμοί μπορούν να γραφούν με τη μορφή κλάσματος που έχει παρονομαστή τη μονάδα.

π.χ. $+3=+\frac{3}{1}$, $-7=-\frac{7}{1}$

Γενικά, μπορούμε να πούμε πως ο αντίστροφος του αριθμού α είναι ο αριθμός $\frac{1}{\alpha}$

$$\text{Αν } \alpha=\frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta} \quad \alpha,\beta,\gamma\in R \text{ και } \alpha,\beta,\gamma\neq 0$$

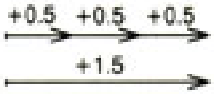
5. Ερμηνεία του κανόνα διαίρεσης των προσήμων

Όπως είπαμε, η διαίρεση του αριθμού α διά του αριθμού β συμβολίζεται με το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$.

Το ίδιο, όμως, είναι αν πολλαπλασιάσουμε τον α επί τον αντίστροφο του β, δηλαδή $\alpha\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$

Είναι, λοιπόν, φανερό πως οι κανόνες διαίρεσης των προσήμων είναι ίδιοι με τους κανόνες πολλαπλασιασμού των προσήμων.

Σαν άσκηση προσπαθήστε να δείξετε γραφικά τους κανόνες διαίρεσης των προσήμων, π.χ.



$$\frac{+3}{+2} = (+3) \cdot (+\tfrac{1}{2}) = (+3) \cdot (+0.5) =$$
$$= +0.5 + 0.5 + 0.5 = +1.5 = +\frac{3}{2}$$

δηλαδή $\frac{+3}{+2} = +\frac{3}{2}$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

1) $(5-3) \cdot (-2+4-1)$
2) $(8-6)(4-3-7)$
3) $(-4+2)(3-1+2+4)$
4) $(3-7)(2-1+3-8)$
5) $3[(7-3)+(4-6)]$
6) $4[-(4+8)+(3-5)]$
7) $-2[(3-6)-(2+8)]$
8) $-(4-3)(6-7+4)$
9) $(6-4+2)[(4-1)-(6+3)]$
10) $-(8-3)[3-(7-1)]$
11) $5[2(4+1)+3(5-2)]$
12) $(6-2)[-3(7-4)+4(8-10)]$
13) $-(3-6)[-2(4-8)-3(2-3)]$
14) $[(7-2)+(6-8)] \cdot [(3-4)+(5-2)]$
15) $-[2(4-6)-3(7-4)][-4(8-7)+3(4-1)]$
16) $\frac{8+3-5}{2+1}$ 17) $\frac{4-1}{3-7}$ 18) $\frac{3-9}{4-2}$
19) $\frac{4-8}{5-7}$ 20) $\frac{8-2}{6-7}$

6. Γινόμενο πολλών παραγόντων

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με το γινόμενο δύο ή περισσότερων άλλων, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε αυτόν τον αριθμό με έναν από τους άλλους. Π.χ.

$$(-3)\cdot[(+4)\cdot(-2)]=[(-3)\cdot(+4)]\cdot(-2)=(-12)\cdot(-2)=+24$$

ή

$$(-3)\cdot[(+4)\cdot(-2)]=[(-3)\cdot(-2)]\cdot(+4)=(+6)\cdot(+4)=+24$$

δηλαδή: $\boxed{\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma=(\alpha\gamma)\beta \qquad \alpha,\beta,\gamma\in R}$

Ιδιότητα 1 $\boxed{\alpha\beta=\beta\alpha \qquad \alpha,\beta\in R}$

Το γινόμενο δεν μεταβάλλεται αν αλλάξουν οι θέσεις των παραγόντων (μεταθετική ιδιότητα). Π.χ.

$$(-3)(+4)(-2)=(-2)(-3)(+4)=(+4)(-2)(-3)=+24$$

Ιδιότητα 2 $\boxed{\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0 \qquad \alpha\in R}$

Αν πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με το μηδέν, το γινόμενο θα είναι μηδέν. Π.χ.

$(+2)\cdot 0=0\,,\quad (-3)\cdot 0=0$

Άρα, αν ένας από τους παράγοντες ενός γινομένου είναι μηδέν, τότε και το γινόμενο είναι μηδέν.

Ιδιότητα 3

$$\boxed{\alpha \cdot (+1) = (+1) \cdot \alpha = \alpha \qquad \alpha \in R}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με το $+1$, το γινόμενο θα είναι ο ίδιος αριθμός. Π.χ.

$(+2) \cdot (+1) = +2\,,\quad (-3) \cdot (+1) = -3$

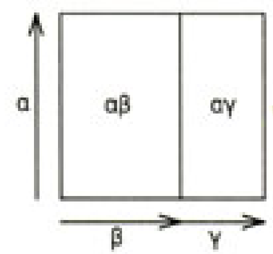
Ιδιότητα 4

$$\boxed{\alpha \cdot (-1) = (-1) \cdot \alpha = -\alpha \qquad \alpha \in R}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με το -1, το γινόμενο θα είναι ο αντίθετος του αριθμού. Π.χ.

$(+2) \cdot (-1) = -2\,,\quad (-3) \cdot (-1) = +3$

7. Πολλαπλασιασμός αριθμού επί άθροισμα



Αν $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$ τότε το γινόμενο $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ παριστάνει το εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει πλευρές α και $(\beta + \gamma)$.

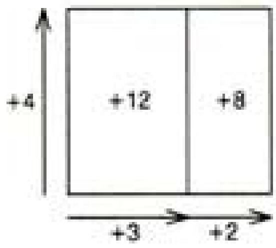
Αλλά το εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που το ένα έχει πλευρές α και β και το άλλο α και γ.

Δηλαδή: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

Γενικά είναι:

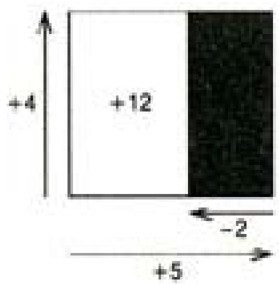
$$\boxed{\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad \alpha, \beta, \gamma \in R}$$

Εφαρμογές



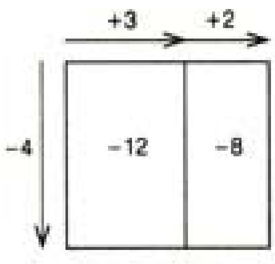
$$(+4)(+3+2) = (+4)(+3) + (+4)(+2) =$$
$$= (+12) + (+8) =$$
$$= +12 + 8 = +20$$

ή $(+4)(+3+2) = (+4)(+5) = +20$



$$(+4)(+5-2) = (+4)(+5) + (+4)(-2) =$$
$$= (+20) + (-8) =$$
$$= +20 - 8 = +12$$

ή $(+4)(+5-2) = (+4)(+3) = +12$



$$(-4)(+3+2) = (-4)(+3) + (-4)(+2) =$$
$$= (-12) + (-8) =$$
$$= -12 - 8 = -20$$

ή $(-4)(+3+2) = (-4)(+5) = -20$

Παραδείγματα

1) $\alpha(\beta-\gamma) + \alpha(\beta+\gamma) = \underline{\alpha\beta} - \alpha\gamma + \underline{\alpha\beta} + \alpha\gamma = 2\alpha\beta$

2) $\alpha(\beta+\gamma) - 2\gamma(\alpha-\beta) = \alpha\beta + \underline{\alpha\gamma} - \underline{2\alpha\gamma} + 2\beta\gamma =$
$= \alpha\beta - \alpha\gamma + 2\beta\gamma$

3) $4(\alpha - 2\beta) + 3(\alpha + \beta) = \underline{4\alpha} - 8\beta + \underline{3\alpha} + 3\beta =$
$= 7\alpha - 5\beta$

4) $5(2 - 3\alpha) - 9\alpha + 3(2\alpha - 6) + 2 =$
$= 10 - \underline{15\alpha} - \underline{9\alpha} + \underline{6\alpha} - 18 + 2 = -18\alpha - 6$

5) $8(2\alpha + 3) - 4(4\alpha + 6) =$
$= \underline{16\alpha} + 24 - \underline{16\alpha} - 24 = 0$

6) $\alpha(\beta + \gamma + \delta) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta$

7) $\alpha(\beta - \gamma + \delta) = \alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha\delta$

8) $-\alpha(\beta - \gamma - \delta) = -\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta$

Σαν άσκηση να υπολογιστεί γραφικά η παράσταση:

$\alpha(\beta + \gamma + \delta)$ αν $\alpha = 5$ $\beta = 3$ $\gamma = 6$ $\delta = -2$

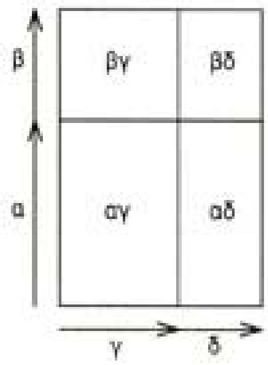
Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

1) $(-\alpha)(+2\beta)(+3\gamma)$
2) $(-2\alpha)(-5\beta)(+6\gamma)$
3) $(-5\alpha)(-4\beta)(-6\gamma)$
4) $2(2\alpha - 3\beta)$
5) $4(-3\alpha - \beta)$
6) $(-\alpha + \beta)(-5)$
7) $(2\alpha - 3\beta)(-6)$
8) $-\alpha(\beta - \gamma)$

9) $-2\alpha(-\beta+2\gamma)$
10) $3(2\alpha+3\beta)+2(\alpha+4\beta)$
11) $6(4\alpha-3\beta)-9(-3\alpha-2\beta)$
12) $-4(\alpha-3\beta)+2(-2\alpha+\beta)$
13) $-5\alpha(6\beta-7\gamma)-6\alpha(-5\beta+6\gamma)$
14) $2(6\alpha-4)-3(5\alpha-2)+4(2\alpha+7)$
15) $5(6\alpha+7\beta-8)-3(4\alpha-5\beta+7)$
16) $-8(2\alpha-3\beta+\gamma)-6(-3\alpha+4\beta-2\gamma)$
17) $-3\alpha(\beta-4\gamma+2\delta)+4\beta(2\alpha-3\gamma-4\delta)$
18) $6(2\alpha-3\beta)+5(-4\alpha-2\beta)-4(\alpha-3\beta)+$
$+2(-2\alpha+\beta)$
19) $3(x-4\alpha)+9(4x-3\alpha)-6(2x-5\alpha)+17$
20) $3\alpha(5y+3)-6(3y+4\alpha)-5(4\alpha y-9)$
21) $(2\alpha+3\beta)\gamma-(-3\alpha+2\beta)\gamma$

8. Πολλαπλασιασμός αθροίσματος επί άθροισμα



Αν α, β, γ, δ ∈ R^+, τότε είναι φανερό πως:

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$$

Απόδειξη για α, β, γ, δ ∈ R:

Αν ονομάσουμε $x=\gamma+\delta$ τότε, όπως ξέρουμε, θα είναι:

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=(\alpha+\beta)x=$$
$$=\alpha x+\beta x=\alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)=$$
$$=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$$

Δηλαδή:

$$\boxed{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R}$$

Εφαρμογές

Να υπολογιστεί γραφικά η παράσταση $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$ αν:

1) $\alpha = 6 \quad \beta = 4 \quad \gamma = 5 \quad \delta = 2$
2) $\alpha = 6 \quad \beta = 4 \quad \gamma = 5 \quad \delta = -2$

Παραδείγματα

1) $(\alpha + \beta)(\gamma - \delta) + \alpha(\beta + \gamma) = \underline{\alpha\gamma} - \alpha\delta + \beta\gamma - \beta\delta +$
$+ \alpha\beta + \underline{\alpha\gamma} = 2\alpha\gamma - \alpha\delta + \beta\gamma - \beta\delta + \alpha\beta$

2) $(\alpha - 2\beta)(3\gamma - \delta) = 3\alpha\gamma - \alpha\delta - 6\beta\gamma + 2\beta\delta$

3) $6x(2\alpha + \beta)(3\gamma - 4\delta) = 6x(6\alpha\gamma - 8\alpha\delta + 3\beta\gamma +$
$-4\beta\delta) = 36\alpha\gamma x - 48\alpha\delta x + 18\beta\gamma x - 24\beta\delta x$

4) $(\alpha - \beta)(\gamma - \delta + \varepsilon) = \alpha\gamma - \alpha\delta + \alpha\varepsilon - \beta\gamma + \beta\delta - \beta\varepsilon$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

1) $(\alpha + 4)(\beta - 9)$
2) $(\alpha - 6)(3 - \beta)$
3) $(3\alpha + 1)(4\beta - 5)$
4) $(4 - 5\alpha)(6\beta + 3)$
5) $(6 + 5\beta)(9 - 8\alpha)$
6) $(9\alpha - 5\beta)(7\gamma - 6\delta)$
7) $(3\alpha - 5)(2\beta - 3\gamma + 4\delta)$
8) $(6\alpha - 7\beta - 5)(2\gamma - 3)$
9) $(\alpha + 2)(\beta - 3)(\gamma - 2)$

10) $(2\,\alpha-5)\,(3\,\beta-2)\,(\gamma-4)$
11) $\alpha\,(\beta+1)\,(2\,\gamma-3)$
12) $(\alpha-\beta)\,(\gamma+2\,\delta-3\,\varepsilon+\zeta)$
13) $(\alpha-2\,\beta+4)\,(\gamma+3\,\delta-5)$
14) $(x-y)\,(\alpha-\beta\,\gamma+2\,\delta)$
15) $(x-4)\,(\alpha+5)-(x-3)\,(\alpha-2)$
16) $(6\,x-5\,y)\,(3\,\alpha+4\,\beta)-(9\,x+2\,y)\,(2\,\alpha-3\,\beta)$
17) $(-3\,\alpha+4\,\beta)\,(-2\,\gamma-5)+(-4\,\alpha-3\,\beta)\,(5\,\gamma-2)$
18) $(-3\,\alpha+4\,\beta+1)\,(-2\,\gamma-\delta-1)$
19) $(-4\,\alpha+3)\,(3\,\beta-4)-(-2\,\alpha+5)\,(-3\,\beta+6)$
20) $3\,(6\,\alpha-4\,\beta)\,(2\,\gamma+5\,\delta)-4\,(3\,\alpha+5\,\beta)\,(7\,\gamma-3\,\delta)$

9. Κοινοί παράγοντες

Είναι γνωστό πως: $\alpha\,(\beta+\gamma+\delta)=\alpha\,\beta+\alpha\,\gamma+\alpha\,\delta$

Αυτή η σχέση είναι ίδια με την: $\alpha\,\beta+\alpha\,\gamma+\alpha\,\delta=\alpha\,(\beta+\gamma+\delta)$

Δηλαδή, τα γινόμενα $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ και $\alpha\delta$, που αποτελούν το άθροισμα $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta$, έχουν **κοινό παράγοντα** το α.

Ασκήσεις

Να βγάλετε τους κοινούς παράγοντες από τα παρακάτω αθροίσματα:

π.χ. $48\,\alpha\,\beta+36\,\alpha\,\gamma=12\,\alpha\,(4\,\beta+3\,\gamma)$

1) $3\,\alpha+3\,\beta$
2) $\alpha\,\beta+\alpha\,\gamma+\alpha\,\varepsilon$
3) $x\,y+y\,z$
4) $4\,\alpha\,x+2\,\beta\,x$

5) $3\alpha\beta - 9\beta\gamma$
6) $4x + 6y + 8z$
7) $9\alpha - 6\beta - 3$
8) $6\alpha z - 3\alpha z + 9\alpha$
9) $4\alpha\beta + 12\alpha\gamma - 16\alpha\delta$
10) $4\alpha\beta\gamma - 6\alpha\beta\delta - 8\alpha\gamma\delta$
11) $2\alpha + 5\alpha - 3\alpha$
12) $-14\alpha\beta + 5\alpha\beta + \alpha\beta$
13) $4\beta - 7\beta + 3\beta$

10. Σημειώσεις πάνω στη διαίρεση

Δεν διαιρούμε με το μηδέν

Αν ο αριθμός α είναι διάφορος του μηδενός, τότε δεν μπορεί να διαιρεθεί διά του μηδενός, γιατί δεν υπάρχει κανένας αριθμός που αν πολλαπλασιαστεί με το μηδέν να δίνει γινόμενο τον α.

Αν ο αριθμός α είναι ίσος με το μηδέν, τότε το πηλίκο $\frac{0}{0}$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

Γι' αυτό, **ποτέ δεν διαιρούμε μια παράσταση με το μηδέν**.

Σημείωση 1 $\boxed{\frac{\alpha}{\alpha} = 1 \qquad \alpha \in R \;\; \text{και} \;\; \alpha \neq 0}$

Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό με τον εαυτό του, το πηλίκο θα είναι μονάδα.

π.χ. $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{-6}{-6} = 1$

Σημείωση 2

$$\boxed{\frac{\alpha}{1}=\alpha\,,\quad \frac{\alpha}{-1}=-\alpha \qquad \alpha\in R}$$

Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό με το +1, το πηλίκο θα είναι ο ίδιος αριθμός. Ενώ, αν διαιρέσουμε έναν αριθμό με το −1, το πηλίκο θα είναι ο αντίθετος του αριθμού.

π.χ. $\frac{3}{1}=3\,,\quad \frac{-6}{1}=-6 \quad$ αλλά $\quad \frac{3}{-1}=-3\,,\quad \frac{-6}{-1}=6$

Σημείωση 3

$$\boxed{\frac{0}{\alpha}=0 \qquad \alpha\in R \ \text{ και } \ \alpha\neq 0}$$

Αν διαιρέσουμε το μηδέν με έναν αριθμό διάφορο του μηδενός, το πηλίκο θα είναι μηδέν.

π.χ. $\frac{0}{3}=0\,,\quad \frac{0}{-6}=0$

11. Άθροισμα κλασμάτων

(Μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα)

Όπως ξέρουμε: $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{2\cdot 4}{4\cdot 5}=\frac{3\cdot 5+2\cdot 4}{4\cdot 5}=\frac{15+8}{20}=\frac{23}{20}$

Δηλαδή: $$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\,\delta+\beta\,\gamma}{\beta\,\delta} \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R \ \text{ και } \ \beta\,\delta\neq 0}$$

Επίσης: $\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{7}{2\cdot 5}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{7\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 5}=\frac{3\cdot 5+7\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 5}$

Δηλαδή:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\lambda\,\beta}+\frac{\gamma}{\lambda\,\delta}=\frac{\alpha\,\delta+\beta\,\gamma}{\lambda\,\beta\,\delta} \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda\in R \ \text{ και } \ \lambda\,\beta\,\delta\neq 0}$$

12. Διαίρεση αθροίσματος διά αριθμού

Για να διαιρέσουμε ένα άθροισμα διά ενός αριθμού, διαιρούμε κάθε όρο του αθροίσματος διά του αριθμού και προσθέτουμε τα πηλίκα.

Δηλαδή:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma} \quad \cdot\ \alpha, \beta, \gamma \in R \quad \text{και} \quad \gamma \neq 0$$

Γενικά:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma+\delta}+\frac{\beta}{\gamma+\delta} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \quad \text{και} \quad \gamma+\delta \neq 0$$

13. Πολλαπλασιασμός αριθμού επί κλάσμα

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό επί ένα κλάσμα, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό επί τον αριθμητή του κλάσματος.

Δηλαδή:

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\beta}{\gamma} \quad \alpha, \beta, \gamma \in R \quad \text{και} \quad \gamma \neq 0$$

Γενικά:

$$(\alpha+\beta)\,\frac{\gamma+\delta}{\varepsilon+\zeta}=\frac{(\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta)}{\varepsilon+\zeta} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in R \quad \text{και} \quad \varepsilon+\zeta \neq 0$$

14. Πολλαπλασιασμός κλάσματος επί κλάσμα

Το γινόμενο κλασμάτων είναι κλάσμα, το οποίο έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ $\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ και $\beta\delta\neq 0$

15. Διαίρεση γινομένου διά αριθμού

Για να διαιρέσουμε ένα γινόμενο διά ενός αριθμού, διαιρούμε έναν από τους παράγοντες του γινομένου διά του αριθμού.

Δηλαδή: $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\delta}\beta\gamma=\frac{\beta}{\delta}\alpha\gamma=\frac{\gamma}{\delta}\alpha\beta$ $\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ και $\delta\neq 0$

16. Απλοποίηση κλάσματος

Είναι: $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\delta}=\frac{\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\beta\gamma}{\delta}=1\cdot\frac{\beta\gamma}{\delta}=\frac{\beta\gamma}{\delta}$ $\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ και $\alpha\delta\neq 0$

17. Διαίρεση κλασμάτων

Έχουμε έτσι τα γνωστά μας σύνθετα κλάσματα:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma}=\left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{1}}\right)=\frac{\alpha}{\beta\gamma},\qquad \frac{\alpha}{\frac{\beta}{\gamma}}=\left(\frac{\frac{\alpha}{1}}{\frac{\beta}{\gamma}}\right)=\frac{\alpha\gamma}{\beta}$$

Γενικά: $\left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}\right)=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$ $\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ και $\alpha\delta\neq 0$

Ασκήσεις

α) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $\dfrac{24\,\alpha}{36\,\beta}$ 2) $\dfrac{25\,\alpha\,\beta}{10\,\beta}$

3) $\dfrac{-3\,\kappa\,\lambda}{18\,\kappa\,\mu}$ 4) $\dfrac{-28\,\alpha}{-7\,\alpha}$

5) $\dfrac{52\,\alpha\,\beta}{-39\,\alpha\,\beta\,\gamma}$ 6) $\dfrac{5\,(x+y)}{7\,(x+y)}$

7) $\dfrac{15\,(y+z)}{-15\,(y+z)}$ 8) $\dfrac{6\,(\alpha+\beta)}{3\,(\alpha+\beta)\,\gamma}$

9) $\dfrac{5\,(3+\alpha)}{10\,(\alpha+3)}$ 10) $\dfrac{3\,\alpha\,(2\,x+3\,y-4\,z)}{3\,y-4\,z+2\,x}$

11) $\dfrac{7\,(6\,x+2\,y-8\,z)}{8\,z+6\,x+2\,y}$ 12) $\dfrac{42\,x\,(y+1)}{56\,\alpha\,x\,(y+1)}$

13) $\dfrac{\alpha\,\beta\,(x-1)\,(x+1)}{\alpha\,(x+2)\,(x-1)}$ 14) $\dfrac{\alpha\,x\,y\,(x+y-1)}{\alpha\,x\,(x+y-1)\,(y-1)}$

15) $\dfrac{3\,\alpha-3\,\beta}{4\,\alpha-4\,\beta}$ 16) $\dfrac{3\,x+3\,y}{3\,x-3\,y}$

17) $\dfrac{6\,\alpha-12\,\beta}{6\,\beta-3\,\alpha}$ 18) $\dfrac{8\,x-16\,y}{8\,y-16\,x}$

19) $\dfrac{(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)}{\alpha\,\gamma+\beta\,\gamma}$ 20) $\dfrac{(\alpha+2\,\beta)\,(\alpha-2\,\beta)}{4\,\beta-2\,\alpha}$

β) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

1) $\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\alpha}{3}$ 2) $\beta+\dfrac{\beta}{5}$

3) $\dfrac{7\,\alpha}{4}-\gamma$ 4) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{2}{3\,\alpha}$

5) $\dfrac{3\,\alpha}{x}-\dfrac{\alpha}{10\,x}$ 6) $\dfrac{\beta}{2\,\gamma}-\dfrac{5\,\beta}{6\,\gamma}$

7) $\dfrac{2}{3\,\alpha}-\dfrac{3}{4\,\alpha}$

8) $\frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha}{4} - \frac{5\alpha}{8} + \frac{7\alpha}{6} - \frac{5\alpha}{12}$

9) $\frac{5\alpha}{6x} - \frac{3\beta}{8x} - \frac{4\alpha}{5x} + \frac{7\beta}{12x} + \frac{\alpha}{120x}$

10) $\frac{3\alpha-5}{4} - \frac{4\alpha-6}{5}$

11) $\frac{2\beta-\gamma}{3} - \frac{5\beta-5\gamma}{8}$

12) $\frac{1}{x} + 1$

13) $1 - \frac{x}{y}$

14) $1 - \frac{1}{x}$

15) $\frac{\alpha}{\beta} - 3\alpha$

16) $5 - \frac{\alpha}{3\beta}$

17) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

18) $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta}$

19) $\frac{3\alpha}{\gamma} + \frac{4\alpha}{\beta}$

20) $\frac{4}{\alpha} - \frac{3}{\beta} - 1$

21) $\frac{4}{x} - \frac{5}{y} + \frac{6}{xy}$

22) $\frac{\alpha}{\alpha-\beta} - 1$

23) $1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

24) $\alpha - \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$

25) $\frac{7x-4}{4(x+1)} - \frac{x-2}{2(x+1)}$

26) $\frac{4\beta-2}{2\beta+4} - \frac{8\beta-7}{6\beta+12} - \frac{2\beta-5}{10\beta+20}$

γ) Να υπολογιστούν τα παρακάτω γινόμενα:

1) $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x}{y}$

2) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5\alpha}{2\beta}$

3) $\frac{3y}{10x} \cdot \frac{5}{6}$

4) $\frac{4\alpha}{5\beta} \cdot \frac{25\beta\gamma}{12\alpha\delta}$

5) $\frac{3\alpha}{4\beta} \cdot \beta$

6) $\frac{x}{4y} \cdot 8y$

7) $\frac{\alpha}{xy} \cdot \beta x$

8) $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta\gamma$

9) $\alpha \cdot \frac{3}{\alpha}$

10) $\frac{5\alpha}{14(\alpha+\beta)} \cdot \frac{7(\alpha+\beta)}{10\beta}$

11) $\frac{x+y}{4z} \cdot \frac{12z}{x+y}$

δ) Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

1) $\dfrac{\frac{\alpha}{4}}{\frac{1}{2}}$ 2) $\dfrac{\frac{3\beta}{5}}{\frac{9}{10}}$ 3) $\dfrac{\frac{\alpha}{x}}{\frac{\beta}{x}}$

4) $\dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{z}}$ 5) $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{2}{\beta}} \cdot \dfrac{4}{\alpha}$ 6) $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{2}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{3}}$

7) $\dfrac{\frac{x}{y-z}}{\frac{x}{y+z}}$ 8) $\dfrac{\frac{1}{\beta-\alpha}}{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}$ 9) $\dfrac{\frac{x}{z}-\frac{y}{z}}{\frac{1}{z}}$

10) $\dfrac{\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\lambda}}$ 11) $\dfrac{\frac{\kappa}{\lambda}+1}{\frac{\kappa}{\lambda}-1}$

Δυνάμεις των πραγματικών αριθμών

1. Έννοια των δυνάμεων και συμβολισμός

Το γινόμενο $5 \cdot 5$ το γράφουμε 5^2

Δηλαδή: $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$

επίσης: $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$

$$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^4$$

$$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^5$$

$$\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu} = \alpha^\nu \qquad \alpha \in R \quad \text{και} \quad \nu \in N$$

π.χ. η πέμπτη δύναμη του 8 είναι ίση με:

$$8^5 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 32\ 768$$

και διαβάζεται: *οχτώ στην πέμπτη (δύναμη).*

Έτσι, το α^ν ισούται με το γινόμενο ν παραγόντων που είναι ίσοι με α. Το α ονομάζεται **βάση** και το ν **εκθέτης**. Και λέμε πως *υψώνουμε το α στη νιοστή δύναμη.*

Προσοχή

Να αποφύγουμε τα παρακάτω λάθη:

Είναι **λάθος** ότι $5^2 = 2 \cdot 5$, γιατί $5^2 = 25$ ενώ $2 \cdot 5 = 10$
Είναι **λάθος** ότι $3 \cdot 3 = 3^3$, γιατί $3 \cdot 3 = 9$ ενώ $3^3 = 27$
Είναι **λάθος** ότι $3^4 = 4^3$, γιατί $3^4 = 81$ ενώ $4^3 = 64$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:

$2^6,\ 7^3,\ 10^6,\ 3^5,\ 14^2,\ 5^4,\ 6^3$

2. Δυνάμεις αρνητικών αριθμών

Ας προσέξουμε τις δυνάμεις:

$(-3)^2 = (-3)\,(-3) = +9$

$(-3)^3 = (-3)\,(-3)\,(-3) = -27$

$(-3)^4 = (-3)\,(-3)\,(-3)\,(-3) = +81$

$(-3)^5 = (-3)\,(-3)\,(-3)\,(-3)\,(-3) = -243$

Παρατηρούμε πως όταν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός, τότε η δύναμη είναι θετικός αριθμός, ενώ όταν ο εκθέτης είναι περιττός, η δύναμη είναι αρνητικός αριθμός.

Δηλαδή, η μόνη διαφορά ανάμεσα στις δυνάμεις των θετικών και στις δυνάμεις των αρνητικών αριθμών είναι ότι οι πρώτες είναι πάντοτε θετικοί αριθμοί, ενώ οι δεύτερες είναι άλλοτε θετικοί και άλλοτε αρνητικοί αριθμοί (ανάλογα αν ο εκθέτης είναι άρτιος ή περιττός).

Προσοχή στον συμβολισμό

Η παράσταση $(-4)^2$ σημαίνει $(-4)\,(-4) = +16$

Ενώ η παράσταση -4^2 σημαίνει $-(4)^2$

δηλαδή: $-4^2 = -(4)\,(4) = -16$

Ασκήσεις

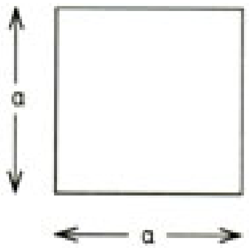
Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:

$(-4)^3$, $(-3)^4$, $(-4)^2$, $(-3)^3$,

-3^5, -3^2, $-(-3)^4$, $-(-2)^5$

3. Ύψωση ενός αριθμού στο τετράγωνο

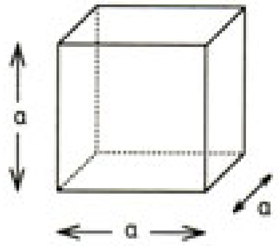
Όταν γράφουμε α^2 το διαβάζουμε: *«α στη δεύτερη δύναμη»* ή *«α στο τετράγωνο»*, γιατί $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$



Δηλαδή, η δεύτερη δύναμη ενός αριθμού α εκφράζει το εμβαδόν ενός τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με α.

4. Ύψωση ενός αριθμού στον κύβο

Όταν γράφουμε α^3 το διαβάζουμε: *«α στην τρίτη δύναμη»* ή *«α στον κύβο»*, γιατί $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$



Δηλαδή, η τρίτη δύναμη ενός αριθμού α εκφράζει τον όγκο ενός κύβου που έχει ακμή ίση με α.

5. Γινόμενο δυνάμεων με βάση τον ίδιο αριθμό

Ισούται με δύναμη που έχει για βάση τον ίδιο αριθμό και για εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

Δηλαδή: $\boxed{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\rho} = \alpha^{\mu+\nu+\rho} \quad \alpha \in R \ \text{ και } \ \mu, \nu, \rho \in Z}$

π.χ. $3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$

6. Δύναμη άλλης δύναμης

Ισούται με δύναμη που έχει για εκθέτη το γινόμενο των εκθετών.

Δηλαδή: $\left(\alpha^{\mu}\right)^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu} \qquad \alpha \in R \;\text{ και }\; \mu, \nu \in Z$

π.χ. $\left(2^{4}\right)^{3} = 2^{4} \cdot 2^{4} \cdot 2^{4} = 2^{12}$

7. Δύναμη γινομένου αριθμών

Ισούται με το γινόμενο που έχει για παράγοντες τους παράγοντες του αρχικού γινομένου, υψωμένους στην ίδια δύναμη.

Δηλαδή: $(\alpha\, \beta\, \gamma)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} \cdot \gamma^{\nu} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in R \;\text{ και }\; \nu \in Z$

π.χ. $(5 \cdot 7 \cdot 3)^{3} = (5 \cdot 7 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 7 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 7 \cdot 3) = 5^{3} \cdot 7^{3} \cdot 3^{3}$

8. Δύναμη πηλίκου δύο αριθμών

Ισούται με το πηλίκο των αριθμών, υψωμένων στην ίδια δύναμη.

Δηλαδή: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} \qquad \alpha, \beta \in R \;\; \beta \neq 0 \;\text{ και }\; \nu \in Z$

π.χ. $\left(\frac{4}{5}\right)^{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4^{3}}{5^{3}}$

9. Πηλίκο δυνάμεων με βάση τον ίδιο αριθμό

Ισούται με δύναμη που έχει για βάση τον ίδιο αριθμό και για εκθέτη τη διαφορά των εκθετών.

Δηλαδή: $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu} \qquad \alpha \in R \quad \alpha \neq 0 \quad \text{και} \quad \mu, \nu \in Z$

$$\pi.\chi. \quad \frac{6^5}{6^2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$$

10. Εκθέτης η μονάδα

Όπως είδαμε, για να υψώσουμε έναν αριθμό σε μια δύναμη, δημιουργούμε ένα γινόμενο με τόσους παράγοντες, ίσους με αυτόν τον αριθμό, όσος είναι ο εκθέτης της δύναμης.

Άρα: $\alpha^1 = \alpha \qquad \alpha \in R$

11. Εκθέτης το μηδέν

Είδαμε πως $\frac{7^6}{7^4} = 7^{6-4} = 7^2$ Άρα και $\frac{7^3}{7^3} = 7^{3-3} = 7^0$

Είναι όμως $\frac{7^3}{7^3} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} = 1$ Άρα $7^0 = 1$

$$\alpha^0 = 1 \qquad \alpha \in R \quad \text{και} \quad \alpha \neq 0$$

$$\pi.\chi. \quad 8^0 = 1 \quad \text{και} \quad (-3)^0 = 1$$

12. Εκθέτης αρνητικός αριθμός

Είναι $\frac{6^3}{6^5} = 6^{3-5} = 6^{-2}$

αλλά $\frac{6^3}{6^5} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6^2}$

Δηλαδή: $\boxed{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \qquad \alpha \in R \quad \alpha \neq 0 \quad \text{και} \quad \nu \in N}$

13. Δυνάμεις με βάση το μηδέν

Όπως είναι φανερό: $\boxed{0^\nu = 0 \qquad \nu \in N}$

Για $\nu = 0$ ή $\nu \in Z^-$ η παράσταση 0^ν δεν έχει νόημα.

Ασκήσεις

α) Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

1) $2\alpha \cdot 3\alpha$	2) $8\gamma^2 \cdot 5\gamma$
3) $6x \cdot 25x^3$	4) $3\beta^3 \cdot 14\beta^2$
5) $8x^4 \cdot 12x$	6) $5xy \cdot 3x$
7) $2\alpha\beta \cdot 5\beta^2$	8) $9\alpha\beta \cdot \beta^3$
9) $4\alpha\beta \cdot 8\alpha\beta$	10) $15\alpha\beta \cdot 8\alpha^2\beta^3$
11) $6\alpha \cdot 5\gamma \cdot 4\beta$	12) $6z \cdot 15x \cdot 2y$
13) $4\alpha\beta \cdot 7\alpha\gamma \cdot 5\beta\gamma$	14) $xyz^2 \cdot x^2 \cdot yz$

15) $25\alpha(\alpha+\beta)$
16) $(3x-2)14x$
17) $5y(4y-3)$
18) $(3\alpha-5\beta)15\alpha$
19) $2x(15x-8x^2)$
20) $25\alpha^2(7\alpha^2-6\alpha)$

β) Να βγάλετε τους κοινούς παράγοντες από τα παρακάτω αθροίσματα:

1) $45\alpha\beta-54\alpha\gamma$
2) $75x^2-45xy$
3) $15\alpha^3-9\alpha^2$
4) $26x^2-39xy$
5) x^4+3x^2-x
6) x^2-x
7) $16xy-14x^2$
8) $20\alpha^2-12\alpha\beta$

γ) Να υπολογιστούν τα πηλίκα:

1) $\frac{12\alpha}{3\alpha}$
2) $\frac{8xy}{xy}$
3) $\frac{9x^2}{x^2}$
4) $\frac{3\alpha^2}{\alpha}$
5) $\frac{3\alpha^2}{3\alpha}$
6) $\frac{3\alpha^2}{\alpha^2}$
7) $\frac{18\alpha\beta}{9\alpha}$
8) $\frac{2x^2y}{xy}$
9) $\frac{3\alpha^2+4\alpha}{\alpha}$
10) $\frac{5\alpha\beta-8\beta^2}{\beta}$
11) $\frac{9\alpha\beta-\alpha}{\alpha}$
12) $\frac{25xy-30y^2}{5y}$
13) $\frac{xy+3x^2y}{xy}$
14) $\frac{6\alpha^3+\alpha^2-5\alpha}{\alpha}$

δ) Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

1) $(-9\alpha)(+8)$
2) $(-6\alpha)(-3\alpha)$
3) $(+\alpha^3)(-3\alpha)$
4) $(-2\alpha)(-4\alpha^3)$
5) $(-5\alpha^3)(-\alpha^2)$
6) $(+\beta^2)(-\beta^4)$

7) $(-2\,\alpha)(-3\,\alpha)(-4\,\alpha)(-5\,\alpha^2)$
8) $(+\alpha\,\beta)(-\alpha^2)(-\beta^2)$
9) $(-x\,y)(2\,x^2\,y)(-3\,x\,y^2)$
10) $(-3\,\alpha^2\,\beta)(-4\,\alpha\,\beta^2)(-\alpha\,\beta)$
11) $(-5\,\beta)(+6\,\beta)(-8\,\beta)(-20\,\beta)$

12) $(-2\,z)^3\cdot(-3\,z)^2$ 13) $(-8\,x\,y)\,x^2\,y$
14) $(-7\,\alpha^2)\,\alpha\,\beta$ 15) $\alpha\,\beta\,(-3\,\alpha\,\beta^2)$
16) $(-2\,x^2\,y^3)\,3\,x^3\,y^2$ 17) $-2\,x\,(-x+2\,y)$
18) $(3\,\alpha-4\,\beta)(-\alpha^3)$ 19) $(-x^2-2\,y^2)(-3\,x^2)$

ε) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

1) $(x+2)(x+3)$ 2) $(x-4)(x-5)$
3) $(x+6)(x-7)$ 4) $(2\,x+1)(3\,x+4)$
5) $(3\,\alpha-5)(6\,\alpha+7)$
6) $(4\,x+3\,y)(5\,x-6\,y)$
7) $(-x+2\,y)(-2\,x-y)$
8) $(6\,\alpha^2+2\,\alpha)(5\,\alpha^2-\alpha)$
9) $(4\,\beta^2-3\,\beta)(-2\,\beta^2+\beta)$
10) $(-3\,\alpha\,\beta-4\,\alpha)(5\,\alpha\,\beta-5\,\beta)$
11) $(3\,\alpha-5)(2\,\alpha^2-3\,\alpha+4)$
12) $(6\,x^2-7\,x-5)(2\,x-3)$
13) $(\alpha^2+2\,\alpha+4)(\alpha^2-2\,\alpha+4)$
14) $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\,\beta+\beta^2)$
15) $(x+y)(x^2-x\,y+y^2)$
16) $x\,(x+1)(x+2)$
17) $(\alpha-3)(\alpha+3)(\alpha^2+9)$
18) $(2\,\alpha-5)(3\,\alpha-2)(\alpha-4)$
19) $(-4\,\alpha+3)(3\,\alpha-4)-(-2\,\alpha+5)(-3\,\alpha+6)$
20) $(-3\,\beta^2+4\,\beta)(-2\,\beta-5)+(-4\,\beta^2-3\,\beta)(5\,\beta-2)$

14. Υπολογισμός των παραστάσεων $(\alpha+\beta)^2$, $(\alpha-\beta)^2$

Γνωρίζουμε πως $x^2 = x \cdot x$

άρα $$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 & \\ & \alpha, \beta \in R \\ (\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 & \end{array}}$$

15. Υπολογισμός της παράστασης $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

Είναι $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$

Δηλαδή:

$$\boxed{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2 \qquad \alpha, \beta \in R}$$

16. Υπολογισμός των παραστάσεων $(\alpha+\beta)^3$, $(\alpha-\beta)^3$

$$(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta) = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha+\beta) =$$
$$= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 =$$
$$= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3 = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta) = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha-\beta) =$$
$$= \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 =$$
$$= \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Δηλαδή:
$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3&=\alpha^3+3\,\alpha^2\,\beta+3\,\alpha\,\beta^2+\beta^3\\(\alpha-\beta)^3&=\alpha^3-3\,\alpha^2\,\beta+3\,\alpha\,\beta^2-\beta^3\end{aligned}\qquad \alpha,\beta\in R}$$

Παρατήρηση

Όταν δύο σχέσεις διαφέρουν μόνο σε ορισμένα πρόσημα, όπως οι σχέσεις : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$, τότε μπορούμε να τις γράψουμε συνοπτικά έτσι:

$$(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\,\alpha\,\beta+\beta^2$$

Όταν θέλουμε να εφαρμόσουμε αυτή τη σχέση με το ένα πρόσημο, τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συνέχεια τα πρόσημα που βρίσκονται παντού στην ίδια θέση (πάνω ή κάτω). Δηλαδή:

$$(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\,\alpha\,\beta+\beta^2 \quad \begin{matrix}\nearrow (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\,\alpha\,\beta+\beta^2\\ \searrow (\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\,\alpha\,\beta+\beta^2\end{matrix}$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε και:

$$(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\,\alpha^2\,\beta+3\,\alpha\,\beta^2\pm\beta^3$$

Ασκήσεις

α) Να υπολογιστούν γραφικά οι σχέσεις:

$(\alpha+\beta)^2$ και $(\alpha-\beta)^2$ αν $\alpha,\beta\in R^+$ και $(\alpha-\beta)\in R^+$

β) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

1) $(x+y)^2$	2) $(z-x)^2$
3) $(\alpha-3)^2$	4) $(1-x)^2$
5) $(2\,x+y)^2$	6) $(2\,\alpha-\beta)^2$

7) $(\alpha + 4\beta)^2$ 8) $(2z + 3)^2$
9) $(3\alpha - 8)^2$ 10) $(9x - 1)^2$
11) $(3x + 4y)^2$ 12) $(4y - 7z)^2$
13) $(x^2 - 1)^2$ 14) $(x^2 + y^2)^2$
15) $(3\alpha^2 + 5\beta^2)^2$ 16) $(x^3 + 1)^2$

γ) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

1) $(x + 2)(x - 2)$ 2) $(x + 3y)(x - 3y)$
3) $(4\alpha - \beta)(4\alpha + \beta)$ 4) $(7x + 1)(7x - 1)$
5) $(x^2 - 6)(x^2 + 6)$ 6) $(\alpha\beta + 9)(\alpha\beta - 9)$
7) $(2\alpha + 5\beta)(2\alpha - 5\beta)$ 8) $(3x - 4y)(3x + 4y)$
9) $(2x + 3x^2)(2x - 3x^2)$ 10) $(4\alpha^2 + 5\alpha)(4\alpha^2 - 5\alpha)$
11) $(9x^3 - 8x)(9x^3 + 8x)$ 12) $(4x - y)(4x + y)$
13) $(2x - 7)(4x + 14)$ 14) $(4x + y)(8x - 2y)$
15) $(3\beta + \alpha)(\alpha - 3\beta)$ 16) $(3\alpha^2 - 7\alpha)(7\alpha + 3\alpha^2)$
17) $(5x - 1)(1 + 5x)$ 18) $(6y + 5x)(5x - 6y)$

δ) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

1) $(3x + 7)^2 - (3x - 7)^2$
2) $(4x + 9y)^2 + (4x - 9y)^2$
3) $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2$
4) $(3x + 5)^2 - (5 - 3x)^2$
5) $(7x + 9y)^2 - (7x + 9y)(7x - 9y)$
6) $(8\alpha - 1)^2 + (2\alpha + 1)(1 - 2\alpha)$
7) $(8x^2 - y^2)(8x^2 + y^2) - (8x^2 - y^2)^2$

ε) Να υπολογιστούν τα σύμβολα ❑, ▲, ▼, ❍, ώστε να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

1) $(\blacktriangle + \square)^2 = \alpha^2 + \bigcirc + 9\beta^2$
2) $(\blacktriangledown - \blacktriangle)^2 = 4x^2 - \bigcirc + y^2$
3) $(\square - 4z)^2 = \blacktriangle - 24z + \bigcirc$
4) $(6x^2 + \bigcirc)^2 = \blacktriangledown + 12x^2 + \blacktriangle$

στ) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

1) $(x+2)^3$ 2) $(1+z)^3$ 3) $(2\alpha+\beta)^3$
4) $(y-6)^3$ 5) $(1-x)^3$

ζ) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

1) $(3x-1)^2+(4x-9)^2-(5x-12)^2$
2) $(2x-\alpha)(2x+\alpha)-(3\alpha-4x)(4x+3\alpha)$
3) $(3x-5)(3x+5)(4x-2)$
4) $(2\alpha+1)(4\alpha^2+1)(2\alpha-1)$
5) $(x-3)^2(x-4)$
6) $(2x-\alpha)(3x+\alpha)^2$
7) $(5x-1)^3$
8) $(2x+1)^4$
9) $(\alpha-1)^5$

Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ.

1. Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

Αν πάρουμε τους αριθμούς 2 και 5 και σχηματίσουμε τα πολλαπλάσιά τους, θα έχουμε:

πολλαπλάσια του 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...

πολλαπλάσια του 5: 5, 10, 15, 20, 25, ...

Βλέπουμε πως παρουσιάζονται πολλαπλάσια του 2 και του 5 που είναι ίδια, όπως το 10, το 20 κλπ.

Το μικρότερο από αυτά τα κοινά πολλαπλάσια είναι το 10. Δηλαδή, το **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** (Ε.Κ.Π.) των αριθμών 2 και 5 είναι ο αριθμός 10.

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών, αναλύουμε τους αριθμούς αυτούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων. Το Ε.Κ.Π. των αριθμών αυτών θα είναι το γινόμενο που αποτελείται από όλους τους πρώτους παράγοντες, υψωμένους στη μεγαλύτερη δύναμη.

Παραδείγματα

α) Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. των αριθμών 9, 20 και 120.

$9 = 3^2$
$20 = 2^2 \cdot 5$
$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Άρα το Ε.Κ.Π. των αριθμών 9, 20 και 120 είναι: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

β) Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων α, β^2, $\alpha\beta$ και $\alpha^3\gamma$.

Είναι φανερό πως το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων αυτών (σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου) είναι:

$$\alpha^3 \beta^2 \gamma$$

2. Μέγιστος κοινός διαιρέτης

Αν πάρουμε τους αριθμούς 20 και 30 και παρατηρήσουμε από ποιούς αριθμούς διαιρούνται (ακριβώς, χωρίς να αφήνουν υπόλοιπο) θα δούμε ότι:

ο αριθμός 20 διαιρείται από τους: 2, 4, 5, 10, 20
ο αριθμός 30 διαιρείται από τους: 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

Βλέπουμε πως και οι δύο αριθμοί διαιρούνται από τους αριθμούς 2, 5 και 10. Δηλαδή, οι **κοινοί διαιρέτες** των αριθμών 20 και 30 είναι οι αριθμοί 2, 5 και 10.

Ο μεγαλύτερος από αυτούς τους κοινούς διαιρέτες είναι το 10. Δηλαδή, ο **μέγιστος κοινός διαιρέτης** (Μ.Κ.Δ.) των αριθμών 20 και 30 είναι ο αριθμός 10.

Για να βρούμε τον Μ.Κ.Δ. δύο ή περισσότερων αριθμών, αναλύουμε τους αριθμούς αυτούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων. Ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών θα είναι το γινόμενο που αποτελείται από όλους τους κοινούς πρώτους παράγοντες, υψωμένους στη μεγαλύτερη κοινή δύναμη.

Παραδείγματα

α) Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών 36, 84 και 120.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Άρα ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών 36, 84 και 120 είναι: $2^2 \cdot 3 = 12$

β) Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων $\alpha^2\beta^3\gamma$, $\alpha\beta^2\gamma$, $\alpha^2\beta^3$ και $\alpha\beta^2\delta$.

Είναι φανερό πως ο Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων αυτών (σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό του μέγιστου κοινού διαιρέτη) είναι:

$$\alpha\,\beta^2$$

Ασκήσεις

α) Να υπολογιστεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των παρακάτω αριθμών:

1) 6, 18
2) 8, 20, 30
3) 24, 31, 48
4) 25, 36, 45
5) 78, 104
6) 24, 72, 108
7) 40, 60, 120
8) 13, 27

β) Να υπολογιστεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των παρακάτω παραστάσεων:

1) $\alpha\beta^2\gamma,\ \alpha^2\beta\gamma,\ \alpha\beta\gamma^2$
2) $\alpha^2\beta^2\gamma^3,\ \alpha\beta^2\gamma,\ \alpha\beta^2\gamma^2$
3) $\alpha\beta,\ \alpha^2\gamma,\ \beta^2\gamma^2$

γ) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αλγεβρικά αθροίσματα:

1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}$
2) $\frac{1}{6}-3+\frac{7}{2}$
3) $\frac{2}{3}-1+\frac{3}{8}-\frac{5}{12}$
4) $\frac{1}{\alpha}-\frac{\beta}{\gamma}+\frac{3}{\alpha\beta\gamma}$
5) $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha}{10\beta}+\frac{\alpha}{2\beta}$
6) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{3\beta^2}-\frac{\alpha}{27}$

Αριθμητική τιμή παράστασης

Αριθμητική τιμή μιας παράστασης λέγεται ο αριθμός που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τα γράμματα που υπάρχουν στην παράσταση με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις.

Π.χ. η αριθμητική τιμή της παράστασης $\alpha^2+\beta\gamma$ για $\alpha=2$, $\beta=-3$ και $\gamma=4$ είναι ο αριθμός -8, γιατί:

$$\alpha^2 + \beta\gamma = 2^2 + (-3) \cdot 4 = 4 - 12 = -8$$

Φυσικά, μια παράσταση έχει άπειρες αριθμητικές τιμές (όσα είναι και τα σύνολα των αριθμών, που μπορούν να αντικαταστήσουν τα γράμματα της παράστασης).

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι αριθμητικές τιμές των παρακάτω παραστάσεων, για $x=4$, $y=-3$, $\alpha=-1$, $\beta=2$.

1) $\alpha^2 + y(x - 3\beta) + x^3$
2) $26x^2 - 39xy$
3) $\dfrac{25xy - 30y^2}{5\alpha\beta}$
4) $(-5x)(-6y)(3\alpha)(8\beta)$
5) $(6y^2 - 7y - 5)(2\alpha - 3)$
6) $(9x^3 - 8y)(9\alpha^3 + 8\beta)$
7) $x(\alpha + 1)(\beta + 2)$
8) $(\alpha + \beta)^3 \cdot (\alpha - \beta)^3$

Ισότητες

Ισότητα ονομάζεται κάθε σχέση, στην οποία υπάρχει το σύμβολο = (ίσον).

π.χ. η σχέση $x = \alpha + \beta$ είναι μια ισότητα.

Κάθε ισότητα αποτελείται από το ίσον και από τα δύο μέλη της. Η παράσταση που είναι αριστερά από το ίσον αποτελεί το **πρώτο μέλος** της ισότητας, ενώ εκείνη που είναι δεξιά από το ίσον αποτελεί το **δεύτερο μέλος**.

π.χ. στην ισότητα $x = \alpha + \beta$ το x αποτελεί το πρώτο μέλος της ισότητας και το $\alpha + \beta$ το δεύτερο μέλος.

Ιδιότητα 1

Αν το ένα μέλος μιας ισότητας είναι ίσο με το ένα μέλος μιας άλλης ισότητας, τότε και τα άλλα μέλη τους θα είναι ίσα.

Δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \beta \\ \alpha = \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \gamma \qquad \alpha, \beta, \gamma \in R$$

Ιδιότητα 2

Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό, η ισότητα δεν μεταβάλλεται.

Δηλαδή:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma \qquad \alpha, \beta, \gamma \in R$$

Έτσι, αν προσθέσουμε δύο ή περισσότερες ισότητες κατά μέλη, προκύπτει πάλι ισότητα.

Δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \beta \\ \gamma = \delta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$$

Παρατήρηση

Σύμφωνα με τη δεύτερη ιδιότητα, μπορούμε να μεταφέρουμε έναν όρο από το πρώτο μέλος μιας ισότητας στο δεύτερο μέλος (ή αντίστροφα), αρκεί να αλλάξουμε το πρόσημό του.

Δηλαδή: $\boxed{\alpha+\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha=\gamma-\beta \qquad \alpha,\beta,\gamma\in R}$

Αυτό μπορούμε να το δούμε αναλυτικά έτσι:

Έχουμε την ισότητα: $\alpha+\beta=\gamma$. Προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον όρο $(-\beta)$ οπότε η ισότητα γίνεται: $\alpha+\beta-\beta=\gamma-\beta$ ή $\alpha=\gamma-\beta$.

Δηλαδή: $\alpha+\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha+\beta-\beta=\gamma-\beta \Leftrightarrow \alpha=\gamma-\beta$

Ιδιότητα 3

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό (εκτός από το μηδέν), η ισότητα δεν μεταβάλλεται.

Δηλαδή: $\boxed{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma=\beta\gamma \qquad \alpha,\beta,\gamma\in R \quad \gamma\neq 0}$

Παρατήρηση

Σύμφωνα με την τρίτη ιδιότητα, μπορούμε να μετατρέψουμε μια ισότητα κλασμάτων σε ισότητα χωρίς κλάσματα.

Δηλαδή: $\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \qquad \begin{array}{l}\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R\\ \text{και} \quad \beta\delta\neq 0\end{array}}$

Αυτό μπορούμε να το δούμε αναλυτικά έτσι:

Έχουμε την ισότητα: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το γινόμενο των παρονομαστών $\beta\delta$ οπότε έχουμε:

$$\frac{\alpha\beta\delta}{\beta}=\frac{\gamma\beta\delta}{\delta} \quad \text{ή} \quad \alpha\delta=\beta\gamma$$

Ιδιότητα 4

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό (εκτός από το μηδέν), η ισότητα δεν μεταβάλλεται.

Δηλαδή: $\boxed{\alpha=\beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\gamma} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in R \quad \gamma \neq 0}$

Ιδιότητα 5

Αν υψώσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας στην ίδια δύναμη, προκύπτει πάλι ισότητα.

Δηλαδή: $\boxed{\alpha=\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha^{\nu}=\beta^{\nu} \qquad \alpha, \beta, \in R \quad \nu \in N}$

Ασκήσεις

α) Αν $x=y$ και $\alpha \neq 0$ να συγκρίνετε τις παραστάσεις $\alpha x+\beta$ και $\alpha y+\beta$.

Λύση: Αφού $x=y$ και $\alpha \neq 0$

τότε: $\alpha x=\alpha y$ (πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη με το α)

και: $\alpha x+\beta=\alpha y+\beta$ (προσθέτω και στα δύο μέλη το β)

Δηλαδή: $\left.\begin{matrix} x=y \\ \alpha \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha x=\alpha y \quad \Leftrightarrow \quad \alpha x+\beta=\alpha y+\beta$

Άρα, αν $x=y$ και $\alpha \neq 0$ οι παραστάσεις $\alpha x+\beta$ και $\alpha y+\beta$ είναι ίσες.

β) Αν $x=y$, $\alpha=\beta$ και $\mu \neq 0$ να συγκρίνετε τις παραστάσεις $\mu x+\alpha$ και $\mu y+\beta$.

γ) Αν $\alpha=\gamma+\delta$ και $\beta-\gamma=\delta$ να συγκρίνετε τους αριθμούς α και β.

δ) Αν $\alpha\beta=\gamma\delta$, $\beta=\delta$ και $\beta \neq 0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς α και β.

Λόγοι και Αναλογίες

1. Ορισμοί και παραδείγματα

Λόγος του α προς το β είναι το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$

Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων.

π.χ. η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ είναι μία αναλογία $(\beta\,\delta \neq 0)$

Οι αριθμοί α, β, γ, δ λέγονται **όροι της αναλογίας**.

Όταν γνωρίζουμε τους 3 όρους μιας αναλογίας, μπορούμε να υπολογίσουμε τον τέταρτο όρο, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της ισότητας. Ο τέταρτος αυτός όρος ονομάζεται **τέταρτος ανάλογος**.

Παραδείγματα υπολογισμού

α) $\frac{x}{3} = \frac{7}{8}$

πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας με τον αριθμό 3, οπότε έχουμε:

$\frac{3\,x}{3} = \frac{3 \cdot 7}{8}$ ή $x = \frac{21}{8} = 2.625$

β) $\frac{4}{x} = \frac{2}{3}$

πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας με το γινόμενο 3x $(x \neq 0)$, οπότε έχουμε:

$\frac{4 \cdot 3\,x}{x} = \frac{2 \cdot 3\,x}{3}$ ή $12 = 2\,x$ ή $2\,x = 12$

διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον αριθμό 2, οπότε έχουμε:

$\frac{2\,x}{2} = \frac{12}{2}$ ή $x = 6$

2. Οι όροι της αναλογίας

Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ οι όροι α, δ λέγονται **ακραίοι όροι**, ενώ οι β, γ λέγονται **μεσαίοι όροι** της αναλογίας.

Όπως έχουμε δει, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη αυτής της ισότητας με το γινόμενο βδ, θα έχουμε:

$$\alpha\,\delta = \beta\,\gamma$$

Πρακτικά, λοιπόν, μπορούμε να πούμε πως σε κάθε αναλογία το γινόμενο των ακραίων όρων της ισούται με το γινόμενο των μεσαίων όρων της.

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της ισότητας αδ = βγ με το γινόμενο γδ, θα έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της ισότητας αδ = βγ με το γινόμενο αβ, θα έχουμε:

$$\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Πρακτικά, λοιπόν, παρατηρούμε ότι σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους ακραίους ή τους μεσαίους όρους της.

Σημείωση

Αν ισχύει η αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε ισχύει και η σχέση:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

Απόδειξη: Η αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ γράφεται και $\alpha\,\delta = \beta\,\gamma$

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ισότητας αδ = βγ το γινόμενο αβ, οπότε έχουμε:

$$\alpha\,\delta + \alpha\,\beta = \beta\,\gamma + \alpha\,\beta$$

$$\text{ή}\quad \alpha\,(\beta + \delta) = \beta\,(\alpha + \gamma)$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το γινόμενο β (β + δ), οπότε έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

και επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

3. Μέσος ανάλογος

Αν σε μία αναλογία οι μεσαίοι ή ακραίοι όροι της είναι ίσοι, τότε οι ίσοι όροι ονομάζονται μέσοι ανάλογοι των άλλων δύο.

π.χ. στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ το β είναι ο **μέσος ανάλογος** των α και γ.

Και έχουμε τη σχέση: $\beta^2 = \alpha\,\gamma$

Ασκήσεις

α) Να γραφούν οι παρακάτω ισότητες με τη μορφή αναλογιών:

1) $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ 2) $2\,x = 3\,y$
3) $9\,\alpha = 5\,\beta$ 4) $\alpha\,\beta = \gamma\,\delta$
5) $x^2 = \alpha\,\beta$ 6) $\alpha\,\beta = \gamma^2$

β) Να υπολογιστεί ο x στις παρακάτω αναλογίες:

1) $\frac{x}{5} = \frac{3}{8}$ 2) $\frac{4}{x} = \frac{9}{16}$
3) $\frac{4}{3} = \frac{x}{9}$ 4) $\frac{2}{3} = \frac{5}{x}$

γ) Να αποδειχθεί ότι αν ισχύει η αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε ισχύει και η αναλογία: $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$

Απόδειξη:

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ισότητας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τον αριθμό $+1$, οπότε έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{\gamma}{\delta} + 1$$

$$\text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\delta}{\delta}$$

$$\text{ή} \quad \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$$

δ) Να αποδειχθεί ότι αν ισχύει η αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε ισχύουν και οι παρακάτω αναλογίες:

1) $\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}$ 2) $\frac{\alpha + \beta}{\alpha} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma}$

3) $\frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \frac{\gamma - \delta}{\gamma}$ 4) $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta}$

4. Κλίμακα

Όταν θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα χάρτη μιας περιοχής, επειδή δεν είναι δυνατό να παρουσιάσουμε την περιοχή με το πραγματικό της μέγεθος, λέμε πως τη σχεδιάζουμε με κάποια κλίμακα, π.χ. 1 : 10 000.

Αυτό σημαίνει πως αν στο χάρτη μας δύο σημεία απέχουν 1 μέτρο, στην πραγματικότητα απέχουν 10 000 μέτρα.

Δηλαδή, αν μια απόσταση είναι α στο χάρτη μας και β στην πραγματικότητα, τότε:

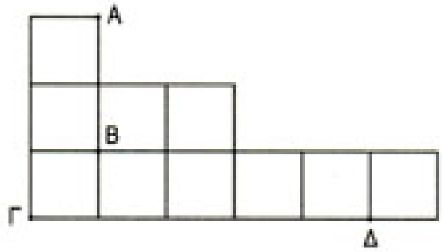
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{10\,000}$$

Ασκήσεις *(σε χαρτί μιλιμετρέ)*

α) Να σχεδιάσετε ένα τετράγωνο πλευράς ενός μέτρου με κλίμακα 1 : 10.

β) Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που οι δύο πλευρές του είναι ίσες με 4 μέτρα και οι άλλες δύο με 5 μέτρα, με κλίμακα 1 : 50.

γ) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα με κλίμακα 1 : 200, αν το κάθε τετράγωνο έχει πλευρά 3 μέτρα.



Έπειτα, να υπολογίσετε την πραγματική απόσταση των σημείων Α, Β και των σημείων Γ, Δ, αφού μετρήσετε τις αποστάσεις τους πάνω στο σχέδιό σας.

Απόλυτες τιμές

Απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

Απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

Απόλυτη τιμή του μηδενός είναι το μηδέν.

Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$

Άρα: $\left\{ \begin{array}{c} |+8| = 8 \\ \\ |-8| = 8 \\ \\ |0| = 0 \end{array} \right\}$ Δηλαδή: $|+\alpha| = |-\alpha|$

Ασκήσεις

Να βρεθούν οι απόλυτες τιμές των παρακάτω αριθμών:

1) 17
2) -17
3) 0
4) $-\dfrac{13}{7}$
5) $\alpha \quad (\alpha \in R^+)$
6) $\alpha \quad (\alpha \in R^-)$
7) $-\alpha \quad (\alpha \in R^+)$
8) $-\alpha \quad (\alpha \in R^-)$
9) $\dfrac{\alpha}{\beta} \quad (\alpha \in R^+ \;\; \text{και} \;\; \beta \in R^-)$
10) $\dfrac{\alpha}{\beta} \quad (\alpha, \beta \in R^-)$

Ανισότητες

Ανισότητα ονομάζεται κάθε σχέση, στην οποία υπάρχει το σύμβολο > (μεγαλύτερο) ή το σύμβολο < (μικρότερο).

π.χ. οι σχέσεις $7 > 3$ και $4 < 9$ είναι ανισότητες.

Κάθε ανισότητα αποτελείται από το σύμβολο της ανισότητας > ή < και από τα δύο μέλη της (πρώτο και δεύτερο μέλος).

Ανισότητες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

Ένας θετικός αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν άλλο θετικό αριθμό β, αν $|\alpha| > |\beta|$.

Ένας θετικός αριθμός α είναι μεγαλύτερος από το μηδέν και από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό β.

Το μηδέν είναι μικρότερο από οποιονδήποτε θετικό αριθμό και μεγαλύτερο από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό.

Ένας αρνητικός αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν άλλο αρνητικό αριθμό β, αν $|\alpha| < |\beta|$.

Όλα αυτά μπορούμε να τα συνοψίσουμε στον ακόλουθο κανόνα: Αν η θετική διεύθυνση του άξονα των πραγματικών αριθμών είναι προς τα δεξιά τότε:

Κάθε πραγματικός αριθμός α είναι μικρότερος από οποιονδήποτε αριθμό, που βρίσκεται δεξιά του στον άξονα των πραγματικών αριθμών και μεγαλύτερος από οποιονδήποτε αριθμό, που βρίσκεται στα αριστερά του.

π.χ. ο αριθμός 3 είναι μικρότερος από τους 4, 5, 6, 7, ... και μεγαλύτερος από τους 2, 1, 0, −1, −2, ...
ενώ ο αριθμός −3 είναι μικρότερος από τους −2, −1, 0, 1, 2, ... και μεγαλύτερος από τους −4, −5, −6, ...

Ιδιότητα 1

Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό, η ανισότητα δεν μεταβάλλεται.

Δηλαδή: $\boxed{\alpha>\beta \iff \alpha+\gamma>\beta+\gamma \qquad \alpha,\beta,\gamma\in R}$

$$\text{π.χ.}\quad 7>4 \iff 7+2>4+2 \iff 9>6$$

Παρατήρηση

Σύμφωνα με την πρώτη ιδιότητα, μπορούμε να μεταφέρουμε έναν όρο από το ένα μέλος μιας ανισότητας στο άλλο, αρκεί να αλλάξουμε το πρόσημό του.

Δηλαδή: $\boxed{\alpha+\beta>\gamma \iff \alpha>\gamma-\beta \qquad \alpha,\beta,\gamma\in R}$

Ιδιότητα 2

Αν πολλαπλασιάσουμε (ή διαιρέσουμε) και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, η ανισότητα δεν μεταβάλλεται.

Δηλαδή:
$$\boxed{\alpha>\beta \iff \begin{cases} \alpha\gamma>\beta\gamma & \alpha,\beta\in R \\ \dfrac{\alpha}{\gamma}>\dfrac{\beta}{\gamma} & \gamma\in R^{+} \end{cases}}$$

π.χ.

$$8>4 \iff \begin{cases} 8\cdot 2>4\cdot 2 \iff 16>8 \\ \dfrac{8}{2}>\dfrac{4}{2} \iff 4>2 \end{cases}$$

$$-8<-4 \iff \begin{cases} -8\cdot 2<-4\cdot 2 \iff -16<-8 \\ -\dfrac{8}{2}<-\dfrac{4}{2} \iff -4<-2 \end{cases}$$

Ιδιότητα 3

Αν πολλαπλασιάσουμε (ή διαιρέσουμε) και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, η ανισότητα αλλάζει φορά.

Δηλαδή:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\gamma < \beta\gamma & \alpha, \beta \in R \\ \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma} & \gamma \in R^- \end{cases}$$

π.χ.

$$8 > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \cdot (-2) < 4 \cdot (-2) \Leftrightarrow -16 < -8 \\ -\frac{8}{2} < -\frac{4}{2} \Leftrightarrow -4 < -2 \end{cases}$$

$$-8 < -4 \Leftrightarrow \begin{cases} (-8) \cdot (-2) > (-4) \cdot (-2) \Leftrightarrow 16 > 8 \\ \frac{-8}{-2} > \frac{-4}{-2} \Leftrightarrow 4 > 2 \end{cases}$$

Διπλές ανισότητες

Αν είναι $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha < \beta < \gamma$$

Αυτό διαβάζεται «*α μικρότερο του β, β μικρότερο του γ*» ή « *β μεταξύ α και γ*».

Φυσικά, είναι το ίδιο αν γράψουμε $\gamma > \beta > \alpha$.

Γενικά: Μπορούμε να γράψουμε με συντομία πολλές ανισότητες μαζί.

π.χ. $-2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3$

Ασκήσεις

α) Αν $x > y$ και $\alpha > 0$ να συγκρίνετε τις παραστάσεις $\alpha x + \beta$ και $\alpha y + \beta$.

β) Αν $x > y$ και $\alpha < 0$ να συγκρίνετε τις παραστάσεις $\alpha x + \beta$ και $\alpha y + \beta$.

γ) Αν $\alpha\beta > \gamma\delta$, $\beta = \delta$ και $\beta \in R^+$ να συγκρίνετε τους αριθμούς α και γ.

δ) Αν $\alpha\beta < \gamma\delta$, $\beta = \delta$ και $\beta \in R^-$ να συγκρίνετε τους αριθμούς α και γ.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

Παράρτημα

Τρόποι γραφής των αριθμών

1. Ελληνική γραφή των αριθμών

Οι αρχαίοι Έλληνες για να γράψουν τους αριθμούς χρησιμοποιούσαν τα γράμματα του αλφαβήτου. Μαζί με τα 24 γράμματα του σημερινού αλφαβήτου είχαν και τα αρχαϊκά γράμματα: ϛ (στίγμα), ϟ (κόππα) και ϡ (σαμπί).

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την αντιστοιχία μεταξύ της ελληνικής και της αραβικής γραφής των αριθμών:

Μονάδες		*Δεκάδες*		*Εκατοντάδες*	
α′	1	ι′	10	ρ′	100
β′	2	κ′	20	σ′	200
γ′	3	λ′	30	τ′	300
δ′	4	μ′	40	υ′	400
ε′	5	ν′	50	φ′	500
ϛ′	6	ξ′	60	χ′	600
ζ′	7	ο′	70	ψ′	700
η′	8	π′	80	ω′	800
θ′	9	ϟ′	90	ϡ′	900

Με αυτά τα γράμματα παρίσταναν όλους τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 999.

π.χ. ιβ′ = 12 λδ′ = 34 σνη′ = 258

Για να γράψουν μονάδες, δεκάδες και εκατοντάδες χιλιάδων μεταχειρίζονταν τα ίδια γράμματα, αλλά έβαζαν τον τόνο αριστερά και λίγο κάτω από το γράμμα. Π.χ. ͵α = 1000 ͵ι = 10000 ͵ρ = 100000

Έτσι: ͵αψμε′ = 1745 ͵μϛψϟη′ = 46798

2. Ρωμαϊκή γραφή των αριθμών

Οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν εφτά από τα γράμματα του λατινικού αλφαβήτου για τη γραφή των αριθμών. Αυτά ήταν τα ακόλουθα, με τις αντίστοιχες τιμές τους:

I = ένα	V = πέντε	X = δέκα	L = πενήντα
C = εκατό	D = πεντακόσια	M = χίλια	

Για να γράψουν όλους τους αριθμούς είχαν τους παρακάτω κανόνες:

α) Όμοια ψηφία, που έχουν γραφεί το ένα δίπλα στο άλλο, πρέπει να προστεθούν.

π.χ.	II	σημαίνει	1+1	δηλαδή 2
	III	σημαίνει	1+1+1	δηλαδή 3
	XX	σημαίνει	10+10	δηλαδή 20 κλπ.

β) Κάθε ψηφίο, που βρίσκεται δεξιά από ένα μεγαλύτερό του, πρέπει να προστεθεί με εκείνο.

π.χ.	VI	σημαίνει	5+1	δηλαδή 6
	VII	σημαίνει	5+2	δηλαδή 7
	XVIII	σημαίνει	10+5+3	δηλαδή 18 κλπ.

γ) Κάθε ψηφίο, που βρίσκεται αριστερά από ένα μεγαλύτερό του, πρέπει να αφαιρεθεί από εκείνο.

π.χ.	IV	σημαίνει	5−1	δηλαδή 4
	IX	σημαίνει	10−1	δηλαδή 9
	XL	σημαίνει	50−10	δηλαδή 40 κλπ.

δ) Δεν επιτρέπεται να υπάρχουν περισσότερα από 4 ίδια ψηφία το ένα δίπλα στο άλλο.

ε) Κάθε αριθμός που έχει επάνω του μία γραμμή παριστάνει χιλιάδες, δύο γραμμές παριστάνει εκατομμύρια και τρεις γραμμές παριστάνει δισεκατομμύρια.

π.χ. $\overline{\text{VI}}\text{CCCXXVII}$ σημαίνει 6327

3. Αραβική γραφή των αριθμών

Η γραφή των αριθμών που χρησιμοποιούμε σήμερα είναι πολύ ευκολότερη από την ελληνική και τη ρωμαϊκή. Εφευρέθηκε πριν από μερικές χιλιάδες χρόνια από τους Ινδούς. Στην Ευρώπη την έφεραν οι Άραβες γύρω στο 900 μ.Χ. Γι' αυτό, οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε σήμερα λέγονται ινδο-αραβικοί. Γράφονται με τα δέκα ψηφία: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 και 0.

Ασκήσεις

α) Να γραφούν οι αριθμοί 36, 79, 289, 307 και 5984 στην ελληνική και στη ρωμαϊκή γραφή.

β) Να γραφούν οι αριθμοί ϟθ', σοα', ϡκη' και ͵βωλα' με ινδο-αραβικά ψηφία.

γ) Να γραφούν με ινδο-αραβικά στοιχεία οι παρακάτω αριθμοί:

CC
DCLV
MCXXXV
MCD
$\overline{\text{X}}$CMLXI

Συστήματα αρίθμησης

1. Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Τα συστήματα αρίθμησης, που έχουν για βάση το 10, ονομάζονται δεκαδικά συστήματα. Σε αυτά, μία δεκάδα αποτελείται από 10 μονάδες, μία εκατοντάδα από 10 δεκάδες κλπ. Το ελληνικό, το ρωμαϊκό και το ινδο-αραβικό είναι δεκαδικά συστήματα.

Ο πιθανότερος λόγος, που διαλέχτηκε σαν βάση σε όλα αυτά τα συστήματα ο αριθμός 10, είναι γιατί και τα δάχτυλα των χεριών μας είναι 10. Και, πιθανότατα, ένα βήμα στην εξέλιξη του μετρικού συστήματος πρέπει να ήταν η χρήση των δαχτύλων των χεριών (όπως και τα μικρά παιδιά ξεκινούν τη μέτρηση των αριθμών με τη βοήθεια των δαχτύλων τους).

Για να καταλάβουμε καλύτερα τη σημασία του δεκαδικού συστήματος, ας εξετάσουμε το ινδο-αραβικό σύστημα αρίθμησης.

Ο αριθμός 325 σημαίνει: 3 εκατοντάδες + 2 δεκάδες + 5 μονάδες.

Αλλά:	μία εκατοντάδα	=	100	=	10^2
	μία δεκάδα	=	10	=	10^1
	μία μονάδα	=	1	=	10^0

Δηλαδή:

$$325 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Έτσι και ο αριθμός 21 407 σημαίνει:

$$21\,407 = 2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

Δηλαδή, η απόσταση ενός ψηφίου από το τέλος του αριθμού φανερώνει και τη δύναμη του 10, με την οποία πρέπει να πολλαπλασιαστεί αυτό το ψηφίο.

Άρα: $3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 = 4\,853$

2. Δωδεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Δωδεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι αυτό που έχει για βάση τον αριθμό 12 (ντουζίνα). Αυτό το σύστημα χρησιμοποιήθηκε κυρίως από τους Αγγλοσάξονες, π.χ. ένα πόδι διαιρείται σε 12 ίντσες (μονάδες μήκους).

Επίσης, χρησιμοποιούμε το δωδεκαδικό σύστημα στη μέτρηση του χρόνου: μία ημέρα έχει 24 (= 2 · 12) ώρες, μία ώρα έχει 60 (= 5 · 12) λεπτά και ένα λεπτό έχει 60 (=5 · 12) δευτερόλεπτα.

3. Δυαδικό σύστημα αρίθμησης

Επειδή οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές λειτουργούν πάνω στην αρχή: ΝΑΙ (περνάει ρεύμα) – ΟΧΙ (δεν περνάει ρεύμα), χρειάστηκε να χρησιμοποιηθεί ένα σύστημα αρίθμησης, που να μεταχειρίζεται δύο μόνο ψηφία (το 0 και το 1), δηλαδή να έχει για βάση τον αριθμό 2.

π.χ. ο αριθμός 1101 στο δυαδικό σύστημα σημαίνει:

$$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$$

Άρα, ο αριθμός 1101 του δυαδικού συστήματος είναι ο αριθμός 13 του δεκαδικού συστήματος.

Για να μετατρέψουμε έναν αριθμό του δεκαδικού συστήματος σε αριθμό του δυαδικού συστήματος κάνουμε διαδοχικές διαιρέσεις με το 2. Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων, από το τέλος προς την αρχή, αποτελούν τον αριθμό στο δυαδικό σύστημα.

Έτσι, αν θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό 13 του δεκαδικού συστήματος σε αριθμό του δυαδικού συστήματος, κάνουμε τις ακόλουθες διαιρέσεις:

(Συνεχίζουμε τις διαιρέσεις μέχρι να βρούμε πηλίκο 0)

$$
\begin{array}{r|l}
13 & 2 \\ \hline
1 & 6
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
6 & 2 \\ \hline
0 & 3
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
3 & 2 \\ \hline
1 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
1 & 2 \\ \hline
1 & 0
\end{array}
$$

Δηλαδή, ο αριθμός στο δυαδικό σύστημα είναι 1101.

Ασκήσεις

α) Να γραφούν οι αριθμοί 1, 4, 9, 18, 47 του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα.

β) Να γραφούν οι αριθμοί 11, 1010, 1111, 11011 του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα.

Μονάδες μέτρησης

Μέτρηση μιας ποσότητας είναι η σύγκριση αυτής με μια άλλη ομοειδή και σταθερή ποσότητα, που τη θεωρούμε μονάδα.

1. Μονάδες μήκους

Μονάδα μήκους είναι το μέτρο (metre - m).

Ένα μέτρο διαιρείται σε 100 εκατοστά (centimetres - cm).

Ένα μέτρο διαιρείται σε 1000 χιλιοστά (millimetres) - mm).

Δηλαδή: 1 m = 100 cm = 1000 mm

Ένα χιλιόμετρο (kilometre -km) είναι ίσο με 1000 m.

Δηλαδή: 1 km = 1000 m

2. Μονάδες επιφάνειας

Μονάδα επιφάνειας είναι το τετραγωνικό μέτρο (m^2).

Ένα τετραγωνικό μέτρο είναι το εμβαδόν ενός τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με ένα μέτρο.

Δηλαδή: $1\ m^2 = 1\ m \cdot 1\ m$

Ένα τετραγωνικό εκατοστό είναι το εμβαδόν ενός τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με ένα εκατοστό. Άρα, ένα τετραγωνικό μέτρο διαιρείται σε $100 \cdot 100 = 10000 = 10^4$ τετραγωνικά εκατοστά (cm^2).

Επίσης, ένα τετραγωνικό μέτρο διαιρείται σε: $1000 \cdot 1000 = 10^6$ τετραγωνικά χιλιοστά (mm^2).

Δηλαδή: $1\ m^2 = 10^4\ cm^2 = 10^6\ mm^2$

Τέλος, ένα στρέμμα είναι ίσο με 1000 m^2.

3. Μονάδες όγκου

Μονάδα όγκου είναι το κυβικό μέτρο (m^3).

Ένα κυβικό μέτρο είναι ο όγκος ενός κύβου που έχει ακμή ίση με ένα μέτρο.

Δηλαδή: $1\ m^3 = 1\ m \cdot 1\ m \cdot 1\ m$

Ένα κυβικό εκατοστό είναι ο όγκος ενός κύβου που έχει ακμή ίση με ένα εκατοστό. Άρα, ένα κυβικό μέτρο διαιρείται σε $100 \cdot 100 \cdot 100 = 10^6$ κυβικά εκατοστά (cm^3).

Επίσης, ένα κυβικό μέτρο διαιρείται σε $1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 10^9$ κυβικά χιλιοστά (mm^3).

Δηλαδή: $1\ m^3 = 10^6\ cm^3 = 10^9\ mm^3$

4. Μονάδες χωρητικότητας

Μονάδα χωρητικότητας είναι το λίτρο (ℓitre - ℓt).

Ένα δοχείο, που έχει σχήμα κύβου ακμής 10 cm, χωράει 1 λίτρο. Άρα, η χωρητικότητα ενός λίτρου είναι $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000\ cm^3$.

5. Μονάδες βάρους

Μονάδα βάρους είναι το γραμμάριο (gramme - gr).

Ένα γραμμάριο είναι το βάρος αποσταγμένου νερού 4°C που έχει όγκο 1 cm^3.

Ένα χιλιόγραμμο ή κιλό (kilogramme - kgr) είναι το βάρος αποσταγμένου νερού 4°C που έχει όγκο 1000 cm^3.

Δηλαδή: 1 kgr = 1000 gr

Άρα, ένα δοχείο χωρητικότητας 1 ℓt, που περιέχει αποσταγμένο νερό 4°C, έχει βάρος 1 kgr.

Ένας τόνος (tonne - t) είναι το βάρος αποσταγμένου νερού 4°C που έχει όγκο 1 m^3.

Δηλαδή: $1\ t = 1000\ kgr = 10^6\ gr$

6. Μονάδες χρόνου

Μονάδα χρόνου είναι η ημέρα (ημερονύκτιο).

Ημέρα είναι ο χρόνος μιας ολόκληρης περιστροφής της γης γύρω από τον άξονά της.

Η ημέρα έχει 24 ώρες (heures - h).

Μία ώρα έχει 60 λεπτά (minutes - min).

Ένα λεπτό έχει 60 δευτερόλεπτα (secondes - sec).

Δηλαδή: 1 h = 60 min = 3600 sec

Ασκήσεις

α) Με πόσα εκατοστά είναι ίσο ένα χιλιόμετρο;

β) Με πόσα χιλιοστά είναι ίσα 18.3 μέτρα;

γ) Με πόσα χιλιοστά είναι ίσα 84.2 εκατοστά;

δ) Με πόσα τετραγωνικά εκατοστά είναι ίσα 14.82 τετραγωνικά μέτρα;

ε) Με πόσα τετραγωνικά χιλιοστά είναι ίσα 7 τετραγωνικά εκατοστά;

στ) Με πόσα κυβικά χιλιοστά είναι ίσα 183.4 κυβικά εκατοστά;

ζ) Με πόσα γραμμάρια είναι ίσα 23.47 χιλιόγραμμα;

η) Πόσα δευτερόλεπτα έχουν 2 ημέρες;

Τόκος - Ανατοκισμός - Τοκοχρεολύσιο

1. Τόκος

Μια Τράπεζα δανείζει σ' έναν επιχειρηματία ένα ποσό χρημάτων για ορισμένο χρονικό διάστημα. Όταν περάσει αυτό το χρονικό διάστημα, τότε ο επιχειρηματίας που δανείστηκε τα χρήματα θα τα επιστρέψει, δίνοντας και από πάνω ένα ορισμένο ποσό, που λέγεται τόκος (T).

Το ποσό που δανείζεται λέγεται κεφάλαιο (Q).

Η χρονική διάρκεια του δανείου, σε έτη, λέγεται χρόνος (n).

Ο τόκος των 100 δραχμών, σε 1 έτος, λέγεται επιτόκιο (ρ').

Το άθροισμα κεφαλαίου και τόκου θα συμβολίζεται με S.
Δηλαδή: $S = Q + T$

Το επιτόκιο ρ' εκφράζεται στις εκατό δραχμές (%). Για παράδειγμα, λέμε ότι το επιτόκιο είναι 8%. Αυτό σημαίνει πως για κάθε 100 δρχ., σε 1 έτος, ο τόκος θα είναι 8 δρχ.

Για απλοποίηση των σχέσεων, στα παρακάτω, το επιτόκιο θα εκφράζεται σαν δεκαδικός αριθμός και θα παριστάνεται με ρ, όπου:

$\rho = \frac{\rho'}{100}$ Δηλαδή, αν $\rho' = 8\%$, τότε: $\rho = \frac{8}{100} = 0.08$

Ο τόκος T, κεφαλαίου Q, που τοκίζεται για n έτη, με επιτόκιο ρ, δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{T = Q \cdot \rho \cdot n}$$

Παραδείγματα

α) Αν κεφάλαιο 10 000 δρχ., τοκιστεί για 4 έτη, με επιτόκιο 10%, τι τόκο θα μας δώσει;

$$Q = 10\,000 \text{ δρχ.} \quad n = 4 \text{ έτη} \quad \rho = \frac{10}{100} = 0.10$$

$$T = Q\,\rho\,n = 10\,000 \cdot 4 \cdot 0.10 = 4\,000 \text{ δρχ.}$$

β) Πόσα έτη πρέπει να τοκιστεί κεφάλαιο 20 000 δρχ., με επιτόκιο 5%, ώστε να μας δώσει τόκο 6000 δρχ.;

$$Q = 20\,000 \text{ δρχ.} \quad T = 6\,000 \text{ δρχ.} \quad \rho = \frac{5}{100} = 0.05$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της ισότητας T=Qρn με το γινόμενο Qρ έχουμε:

$$\frac{T}{Q\,\rho} = n \quad \text{ή} \quad n = \frac{T}{Q\,\rho}$$

Άρα:

$$n = \frac{6\,000}{20\,000 \cdot 0.05} = \frac{6\,000}{1\,000} = 6 \text{ έτη}$$

Σημείωση

Αν ο χρόνος είναι σε μήνες ή ημέρες, για να εφαρμοστεί ο τύπος του Τόκου, μετατρέπουμε τους μήνες ή τις ημέρες σε κλάσμα του έτους.

Ασκήσεις

α) Αν κεφάλαιο 15 000 δρχ. τοκιστεί για 6 έτη, με επιτόκιο 9%, πόσο τόκο θα δώσει;

β) Με τι επιτόκιο πρέπει να τοκιστεί κεφάλαιο 10 000 δρχ., για 5 έτη, ώστε να δώσει τόκο 8000 δρχ.;

γ) Πόσα έτη πρέπει να τοκιστεί κεφάλαιο 25 000 δρχ., με επιτόκιο 4%, ώστε να δώσει τόκο 7 000 δρχ.;

δ) Ποιό κεφάλαιο πρέπει να τοκιστεί για 5 έτη, με επιτόκιο 8%, ώστε να μας δώσει τόκο 6 000 δρχ.;

2. Ανατοκισμός

Συνήθως, όταν τοκίζουμε ένα κεφάλαιο για ορισμένα έτη, στο τέλος κάθε έτους προσθέτουμε τον τόκο στο κεφάλαιο και έτσι δημιουργείται ένα νέο κεφάλαιο για το επόμενο έτος. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε πως το κεφάλαιο ανατοκίζεται.

Το ποσό που θα συγκεντρωθεί (κεφάλαιο και τόκοι) στο τέλος του n έτους θα είναι:

$$\boxed{S = Q\,(1+\rho)^n}$$

Παράδειγμα

Αν καταθέσουμε στην Τράπεζα κεφάλαιο 20 000 δρχ., που ανατοκίζεται κατ' έτος, με επιτόκιο 10%, τι ποσό θα πάρουμε μετά από 4 έτη;

$$Q = 20\,000 \ \text{δρχ.} \quad n = 4 \ \text{έτη} \quad \rho = \frac{10}{100} = 0.1$$

$$S = Q\,(1+\rho)^n = 20\,000\,(1+0.1)^4 = 20\,000 \cdot 1.1^4 =$$
$$= 20\,000 \cdot 1.4641 = 29\,282 \ \text{δρχ.}$$

Σημείωση

Αν το κεφάλαιο δεν ανατοκιζόταν, τότε ο τόκος του σε 4 έτη θα ήταν:

$$T = Q \cdot \rho \cdot n = 20000 \cdot 0.1 \cdot 4 = 8000 \ \text{δρχ.}$$

και $$S = Q + T = 20000 + 8000 = 28000 \ \text{δρχ.}$$

δηλαδή λιγότερες δραχμές από την περίπτωση του ανατοκισμού. Γιατί, όταν το κεφάλαιο ανατοκίζεται, κάθε έτος μεγαλώνει, άρα μεγαλώνει και ο τόκος του.

Άσκηση

Αν καταθέσουμε στην Τράπεζα κεφάλαιο 30 000 δρχ., που ανατοκίζεται κατ' έτος, με επιτόκιο 8%, τι ποσό θα πάρουμε μετά από 5 χρόνια;

3. Τοκοχρεολύσιο

Ας υποθέσουμε ότι δανείζεται κάποιος, για ορισμένα έτη, ένα κεφάλαιο Q. Το κεφάλαιο αυτό θέλει να το επιστρέψει, δίνοντας στο τέλος κάθε έτους ένα ορισμένο ποσό R. Η συμφωνία είναι ότι το κεφάλαιο, που απομένει κάθε έτος, θα ανατοκίζεται. Αυτός ο τρόπος επιστροφής του κεφαλαίου που δανείστηκε ονομάζεται τοκοχρεολυτική απόδοση. Το ποσό R, που θα επιστρέφει κάθε έτος, ονομάζεται τοκοχρεολύσιο. Το τοκοχρεολύσιο δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{R = Q \cdot \frac{\rho\,(1+\rho)^n}{(1+\rho)^n - 1}}$$

όπου: Q = το κεφάλαιο που δανείστηκε
n = τα έτη που θα περάσουν για να εξοφληθεί το δάνειο
ρ = το επιτόκιο, με το οποίο θα ανατοκίζεται το κεφάλαιο που απομένει κάθε έτος

Εφαρμογή

Να υπολογιστεί το τοκοχρεολύσιο για τις ακόλουθες τιμές:

Q = 20 000 δρχ. n = 4 έτη ρ = 0.10

$$R = 20\,000\,\frac{0.1\,(1+0.1)^4}{(1+0.1)^4 - 1} = 20\,000\,\frac{0.1 \cdot 1.1^4}{1.1^4 - 1} =$$

$$= 20\,000\,\frac{0.1 \cdot 1.4641}{1.4641 - 1} = 20\,000\,\frac{0.14641}{0.4641} =$$

$$= 20\,000 \cdot 0.3154 = 6\,308 \quad \text{δρχ. / έτος}$$

Ασκήσεις *(με τη βοήθεια αριθμομηχανής)*

α) Να εφαρμοστεί ο τύπος του ανατοκισμού για τις ακόλουθες τιμές:

1)	Q = 10000 δρχ.	ρ′ = 8%	n = 7 έτη
2)	Q = 8000 δρχ.	ρ′ = 12%	n = 5 έτη
3)	Q = 20000 δρχ.	ρ′ = 6%	n = 10 έτη

β) Να εφαρμοστεί ο τύπος του τοκοχρεολύσιου για τις ακόλουθες τιμές:

1)	Q = 25000 δρχ.	ρ′ = 10%	n = 4 έτη
2)	Q = 15000 δρχ.	ρ′ = 8%	n = 6 έτη
3)	Q = 10000 δρχ.	ρ′ = 12%	n = 3 έτη

Μέσος όρος

Ένας εργάτης πήρε τη μία μέρα μεροκάματο 8200 δρχ., την επόμενη 8100 δρχ. και την τρίτη 8600 δρχ. Αν έπαιρνε κάθε μέρα το ίδιο μεροκάματο, ποιό θα έπρεπε να ήταν αυτό, ώστε να πάρει συνολικά τα ίδια χρήματα;

Τις 3 μέρες πήρε συνολικά: 8200 + 8100 + 8600 = 24900 δρχ.

Αν έπαιρνε το ίδιο μεροκάματο κάθε μέρα, αυτό θα έπρεπε να ήταν: 24900 / 3 = 8300 δρχ.

Αυτό το μεροκάματο λέγεται **μέσος όρος** των τριών άλλων.

Δηλαδή, μέσος όρος δύο ή περισσότερων αριθμών λέγεται το πηλίκο του αθροίσματος των αριθμών δια του αριθμού που εκφράζει το πλήθος τους.

Ο ορισμός αυτός συμβολίζεται ως εξής:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\nu} \alpha_n}{\nu}$$

και διαβάζεται: *«άθροισμα των όρων a_n, από n=1 έως ν, διά ν».*

Ασκήσεις

α) Ένας μαθητής πήρε στα διάφορα μαθήματα τους ακόλουθους βαθμούς: 17, 16, 18, 15, 16, 19, 18 και 16. Ποιός είναι ο μέσος όρος της βαθμολογίας του;

β) Η μεγαλύτερη θερμοκρασία μιας ημέρας ήταν 12.8 βαθμοί Κελσίου και η μικρότερη 6.4 βαθμοί. Ποιά ήταν η μέση θερμοκρασία της ημέρας;

γ) Σε μια πόλη, τον Ιανουάριο γεννήθηκαν 75 παιδιά, τον Φεβρουάριο 63, τον Μάρτιο 105, τον Απρίλιο 84, τον Μάιο 60 και τον Ιούνιο 45. Ποιός ήταν ο μέσος όρος των γεννήσεων στην πόλη αυτή;

Αντί επιλόγου (ή οδηγιών)...

*Πριν από είκοσι χρόνια είχα δημοσιεύσει το ακόλουθο άρθρο, με τίτλο **«Τα Μαθηματικά είναι πραγματικά για τόσο λίγους;»**, στο περιοδικό* Πολίτης. *Επειδή, δυστυχώς, το άρθρο αυτό εξακολουθεί και σήμερα, μετά από τόσα χρόνια, να είναι δραματικά επίκαιρο, αποφάσισα να το τοποθετήσω σαν Επίλογο ή σαν μια μορφή Οδηγιών προς τους γονείς και τους εκπαιδευτικούς. Πιστεύω πως το πιο σημαντικό πράγμα είναι να κατανοήσουμε όλοι μας **γιατί διδάσκουμε τα Μαθηματικά** - ποιοί είναι οι στόχοι μας; Ασφαλώς δεν είμαστε σαδιστές για να θέλουμε να βασανίζουμε τα παιδιά μας. Τι αποτελέσματα, όμως, έχουμε μέχρι τώρα;*

Κάθε φθινόπωρο, μετά τις εισαγωγικές εξετάσεις για τις Ανώτατες Σχολές, αναζωπυρώνεται και το γενικό ενδιαφέρον (Τύπου και κοινού) για τις στατιστικές γύρω από τα αποτελέσματα των εξετάσεων.

Είναι αλήθεια, βέβαια, πως αυτές οι «δημοσιογραφικές» στατιστικές δεν δίνουν συνήθως την πραγματική εικόνα της κατάστασης, γιατί δεν παίρνουν υπόψη τους όλα τα δεδομένα. Υπάρχουν όμως ορισμένα νούμερα που, οπωσδήποτε, είναι τόσο συντριπτικά, ώστε δεν αφήνουν περιθώρια για αμφιβολίες. Τα νούμερα αυτά είναι τα ποσοστά αποτυχίας των υποψηφίων του Πολυτεχνικού και Φυσικομαθηματικού Κύκλου στα Μαθηματικά (Άλγεβρα, Γεωμετρία, Τριγωνομετρία).

Φυσικά, αυτά τα ποσοστά είναι επηρεασμένα από τη γενικότερη καθίζηση του επιπέδου των αποφοίτων της Μέσης Εκπαίδευσης στον τόπο μας τα τελευταία χρόνια — γεγονός που κάποτε θα έπρεπε να μας προβληματίσει σοβαρά για τα αίτια του (εκπαιδευτικά, οικονομικά και κοινωνικά) πέρα από δημαγωγικές συνθηματολογίες και γενικότητες χωρίς περιεχόμενο, που βοηθούν στην παραπέρα υποβάθμιση των σπουδών. Αλλά είναι τόσο μεγαλύτερα από τα ποσοστά αποτυχίας στα υπόλοιπα μαθήματα, ώστε μπορεί κανείς να τα εξετάσει χωριστά και να προσπαθήσει να βρει τα αίτια αυτής της διαφοράς.

Η πρώτη απάντηση που έρχεται στη σκέψη μας είναι πως τα Μαθηματικά είναι για τους «λίγους», τους «έξυπνους», αυτούς που έχουν «μαθηματικό μυαλό».

Δυστυχώς, η απάντηση αυτή έχει βαθιές ρίζες στην κοινή γνώμη και, πολλές φορές, ακούγεται ακόμη κι από «ειδικούς».

Από τη μια μεριά τα δυσάρεστα σχολικά βιώματα κι από την άλλη η παλιά, μουχλιασμένη πιά, εικόνα του σοφού, που η μεγαλοφυΐα του τον οδηγεί σε ανακαλύψεις απρόσιτες στον κοινό νου, συντελούν στη δημιουργία μιας ψεύτικης εντύπωσης τόσο για τα Μαθηματικά όσο και γι' αυτούς που ασχολούνται με τα Μαθηματικά.

Τον Οκτώβριο του 77, ο τότε Υπουργός Παιδείας, σε συνέντευξή του σε εβδομαδιαίο περιοδικό, για να δικαιολογήσει την τρομερή αποτυχία των υποψηφίων για τα Α.Ε.Ι. στα Μαθηματικά, δήλωσε πως αυτά είναι για λίγους. Και, απ' όσο γνωρίζω, δεν υπήρξε καμία αντίδραση ούτε από την κοινή γνώμη ούτε από τους επιστήμονες εκείνους που έχουν μια ικανοποιητική γνώση των Μαθηματικών.

Είναι όμως πραγματικά τα Μαθηματικά για τόσο λίγους;

✲

Και πρώτα-πρώτα τι είναι τα Μαθηματικά; Θα μπορούσαμε να πούμε πως τα Μαθηματικά είναι ταυτόχρονα ένα μέσο επικοινωνίας (μια γλώσσα δηλαδή) και ένα εργαλείο για τη μελέτη του περιβάλλοντος. Με τη βοήθεια των Μαθηματικών ανακαλύπτουμε σχέσεις (τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα πράγματα) και τις εκφράζουμε με σύμβολα[1].

Παραδοσιακά, συνηθίσαμε να χωρίζουμε τα Μαθηματικά σε διάφορους κλάδους: Αρθμητική, Άλγεβρα, Ευκλείδεια γεωμετρία, Τριγωνομετρία, Αναλυτική γεωμετρία, Διαφορικός λογισμός κλπ.

Ως ένα βαθμό, αυτοί οι κλάδοι αντιστοιχούν στην ανάπτυξη των επιστημών, στη διαδοχική προσέγγιση δηλαδή του περιβάλλοντος από τον άνθρωπο.

Για παράδειγμα, όσο είμασταν περιορισμένοι στη μελέτη φυσικών φαινομένων πάνω στη γη, η Ευκλείδεια γεωμετρία ήταν ένα εργαλείο ικανοποιητικό για την ερμηνεία αυτών των φαινομένων. Όταν, όμως, θελήσαμε να μελετήσουμε το σύμπαν, χρειάστηκε να την ξεπεράσουμε και να στηριχτούμε στη γεωμετρία του Ρίμαν.

---

1. Nuffield Mathematics project, *Κάνω και καταλαβαίνω* (Εκδόσεις Χελιδόνι, Θεσσαλονίκη 1977).

Ανάλογα, μπορούμε να δούμε την αντιστοιχία ανάμεσα στην ανάπτυξη των διαφόρων κλάδων των Μαθηματικών και στην εξέλιξη των φιλοσοφικών θεωριών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η αντιστοιχία μαθηματικών και φιλοσοφικών θεωριών στον Λάιμπνιτς και στον Ντεκάρτ[2].

Βέβαια, ορισμένες φορές, μερικοί κλάδοι των Μαθηματικών αναπτύσσονται υπερτροφικά, σπάζοντας τη σύνδεσή τους με τη μελέτη του περιβάλλοντος. Κλασικό παράδειγμα η γεωμετρία των Ιησουϊτών μοναχών. Μη μπορώντας να ξεπεράσουν διαλεκτικά τα όρια της Ευκλείδειας γεωμετρίας (και επηρεασμένοι από το ιδεολογικό και κοινωνικοοικονομικό τους πλαίσιο) μετέτρεψαν αυτή τη γεωμετρία σε μανιέρα για τη διερεύνηση σχέσεων που δεν εξυπηρετούσαν καμιά ανάγκη. Δηλαδή η ανακάλυψη για την ανακάλυψη.

Σε καμιά όμως περίπτωση ένας κλάδος των Μαθηματικών δεν είναι ξεκομμένος από τους άλλους. Συνήθως η μελέτη ενός φαινομένου απαιτεί τη συνδυασμένη χρησιμοποίηση πολλών κλάδων. Όσο μάλιστα βαθύτερη είναι αυτή η μελέτη, τόσο πιο πολύ τα Μαθηματικά παρουσιάζονται σαν ένα εργαλείο που αποτελείται από ένα ενιαίο σύνολο νόμων με εσωτερική συνοχή. Τα τελευταία 150 χρόνια, που η εξέλιξη των Μαθηματικών (παράλληλα με την εξέλιξη όλων των φυσικών επιστημών) είναι ραγδαία, κάθε νέο Μαθηματικό μοντέλο έρχεται να ενοποιήσει τα προηγούμενα σε μια διαλεκτική σύνθεση.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα παραπάνω, τα Μαθηματικά χρειάζονται σε κάθε άνθρωπο στον βαθμό εκείνο που του είναι απαραίτητος για να επικοινωνήσει με τους άλλους και για να προσεγγίσει το περιβάλλον του. Φυσικά, οι ανάγκες επικοινωνίας και προσέγγισης του περιβάλλοντος ποικίλλουν από άτομο σε άτομο ανάλογα με τις συνθήκες της ζωής του (είδος εργασίας, βαθμός και είδος συμμετοχής στα κοινά, επίπεδο ανάπτυξης της κοινωνίας μέσα στην οποία ζει).

Επομένως, το ερώτημα αν τα Μαθηματικά είναι για λίγους ή πολλούς, από τη σκοπιά της χρησιμότητάς τους, δεν έχει νόημα, γιατί το πραγματικό ερώτημα είναι ποιό επίπεδο προσέγγισης των μαθηματικών είναι απαραίτητο στο κάθε συγκεκριμένο άτομο. Αφού απαντήσουμε στο τελευταίο αυτό ερώτημα, τότε μόνο μπορούμε να διερωτηθούμε αν το συ-

---

2. Γ. Μουρέλος, *Η έννοια του προτύπου στη Φιλοσοφία και στην Επιστήμη*. Ανάτυπο από τα «Χρονικά» του Πειραματικού Σχολείου του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη.

γκεκριμένο άτομο είναι ικανό να κατανοήσει τα Μαθηματικά στο επίπεδο που του είναι αναγκαίο.

✲

Ας δούμε τώρα τι άτομα επιδιώκει να διαμορφώσει η ελληνική εκπαίδευση (πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια) με τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση οι μαθητές διδάσκονται Αριθμητική (ακέραιους, δεκαδικούς και κλασματικούς αριθμούς και την απλή μέθοδο των τριών), Γεωμετρία (υπολογισμό εμβαδού και όγκου των βασικών γεωμετρικών σχημάτων και στερεών) και τον υπολογισμό του τόκου. Μέχρι πέρσι (1977) διδάσκονταν επιπλέον μίξεις και κράματα.

Το πρόγραμμα αυτό της διδασκαλίας των Μαθηματικών αποτελεί ένα οργανωμένο σύνολο που σκοπεύει στη διαμόρφωση ατόμων με βάση τα πρότυπα του λογιστή, του μικρέμπορου και του σαράφη, όπως είχαν αποκρυσταλλωθεί στα τέλη του 19ο αιώνα. Εξάλλου, τα ίδια τα προβλήματα, που η πρωτοβάθμια εκπαίδευση επιδιώκει να μάθει στο παιδί να λύνει, κάνουν φανερή την προοπτική. Το 90% τουλάχιστο των προβλημάτων περιέχουν αγορά, πώληση ή δανεισμό.

Ενώ, για παράδειγμα, ένας μέσος απόφοιτος του δημοτικού δεν είναι ικανός να υπολογίσει πόσα τούβλα θα χρειαστεί για να χτίσει έναν τοίχο με ορισμένες διαστάσεις (πράγμα που, το λιγότερο, θα έπρεπε να μπορεί να σκεφτεί ένας σημερινός οικοδόμος).

Το γεγονός αυτό φαίνεται φυσιολογικό αν αναλογιστούμε πως οι βάσεις του σημερινού προγράμματος για το δημοτικό έχουν μπει στα τέλη του προηγούμενου αιώνα[3].

Αντίθετα με την πρωτοβάθμια, η δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν σκοπεύει σε κανένα πρότυπο. Δεν έγινε ποτέ κανένα οργανωμένο πρόγραμμα διδασκαλίας των Μαθηματικών με συγκεκριμένους κοινωνικούς και οικονομικούς στόχους. Το μόνο που γίνεται κάθε τόσο είναι να προ-

---

3. Όπως αναφέρουμε στον Πρόλογο αυτού του βιβλίου, τα τελευταία χρόνια έγιναν συνεχείς προσπάθειες αλλαγών στην ύλη των Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Αυτές, όμως, οι αλλαγές δεν έγιναν με κάποιο στόχο σύνδεσης των Μαθηματικών με την κοινωνία και τη μελέτη του περιβάλλοντος, αλλά με τον υποτιθέμενο «εμπλουτισμό» της Αριθμητικής με στοιχεία της Άλγεβρας, αποκομμένα από τον εννοιολογικό κορμό τους. (Σημείωση του συγγραφέα, 1998).

στίθεται ένα κεφάλαιο δίπλα σ' άλλα. Ως ένα βαθμό, αυτό αντικατοπτρίζει το είδος και τη μορφή της αναπτυξιακής διαδικασίας στον τόπο μας.

Έτσι, βλέπει κανείς στο αναλυτικό πρόγραμμα από τη μια μεριά την Απολλώνεια περιφέρεια και τον κύκλο του Όιλερ και από την άλλη την Αναλυτική γεωμετρία και τον Διαφορικό λογισμό. Επιπλέον, ο τεμαχισμός των Μαθηματικών σε κλάδους (που χωρίζονται μεταξύ τους με στεγανά) είναι απόλυτος.

Χαρακτηριστικό αποτέλεσμα αυτού του τρόπου οργάνωσης της ύλης των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι η ανυπαρξία σχεδόν προβλημάτων. Βασικά υπάρχουν ασκήσεις για να συνηθίσει ο μαθητής στη χρήση διαφόρων τεχνικών και να μάθει να εφαρμόζει «τύπους», που όμως δεν έμαθε ποτέ τι σημαίνουν.

Για παράδειγμα, θα ήταν πολύ δύσκολο να βρούμε σήμερα έναν απόφοιτο του Λυκείου που θα μπορούσε ν' απαντήσει στην ερώτηση: «τι εκφράζει μια δευτεροβάθμια εξίσωση και ποιά είναι η φυσική της σημασία;». Ας μη ρωτήσουμε δε, σε τι μας χρησιμεύει το θεώρημα του Πτολεμαίου ή το κέντρο του Όιλερ, γιατί σ' αυτές τις ερωτήσεις δεν μπορούν ν' απαντήσουν ούτε οι καθηγητές των γυμνασίων μας.

Καταλήγουμε, λοιπόν, να μην έχουμε καμιά σύνδεση των Μαθηματικών με το αντικείμενό τους που, όπως είπαμε, είναι η ανακάλυψη και διερεύνηση των σχέσεων που υπάρχουν ανάμεσα στα πράγματα.

Το αποτέλεσμα είναι διπλά αρνητικό. Πρώτα, γιατί η μετατροπή των Μαθηματικών σε μια σειρά από τεχνικές και τύπους δεν επιτρέπει την πραγματική γνώση τους. Και ύστερα, γιατί δεν δίνει κανένα κίνητρο για μάθηση.

Όσο για τις μεθόδους διδασκαλίας των Μαθηματικών, αυτές είναι ανύπαρκτες. Ποτέ μέχρι σήμερα δεν έχει γίνει καμιά προσπάθεια για να προβληματιστούμε γύρω από τον τρόπο διδασκαλίας των Μαθηματικών, που αφήνεται στην «καλή διάθεση» των καθηγητών.

Έτσι, όταν λέμε πως θέλουμε να ελέγξουμε τις γνώσεις και την ικανότητα κρίσης των υποψηφίων φοιτητών στα Μαθηματικά, αντιφάσκουμε με το ίδιο το αναλυτικό μας πρόγραμμα, το οποίο απαγορεύει την πραγματική γνώση και, ακόμα περισσότερο, την ανάπτυξη της κρίσης του μαθητή. Η τεράστια δηλαδή αποτυχία στις εξετάσεις θα έπρεπε να αναμένεται. Όταν εμείς οι ίδιοι (με το αναλυτικό πρόγραμμα και τον τρόπο «διδασκαλίας» που χρησιμοποιούμε) φροντίζουμε να μην καταλάβουν τα παιδιά τα Μαθηματικά, τι μπορούμε να περιμένουμε στις εξετάσεις;

Και βέβαια είναι μετάθεση του προβλήματος, όταν διερωτόμαστε αν τα Μαθηματικά μπορούν να τα καταλάβουν λίγοι ή πολλοί, αντί να προβληματιζόμαστε πάνω στο επίπεδο προσέγγισης των Μαθηματικών που είναι απαραίτητο σε κάθε βαθμίδα της εκπαίδευσης και στις μεθόδους με τις οποίες το αντίστοιχο επίπεδο θα γίνει προσιτό σε όλα τα παιδιά.

✲

Τι πρέπει λοιπόν να γίνει;

Πρώτα-πρώτα οφείλουμε να ξεπεράσουμε ορισμένους «κοινούς τόπους» που οδηγούν σε πλήρη διαστρέβλωση της ίδιας της έννοιας της Παιδείας. Για παράδειγμα, ότι «σκοπός του σχολείου είναι να προσφέρει γνώσεις». Σήμερα πια ξέρουμε πως καμιά γνώση δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά πρέπει να τείνει στην απόκτηση άλλων γνώσεων[4]. Με άλλα λόγια θα μπορούσαμε να πούμε πως εκείνο που πρέπει να μάθουμε στα παιδιά είναι ο τρόπος δουλειάς, η μεθοδολογία.

Ύστερα θα πρέπει να δώσουμε ένα πραγματικό περιεχόμενο σε μερικές απόψεις που αποπροσανατολίζουν την κοινή γνώμη. Μια τέτοια άποψη είναι πως τα Μαθηματικά «οξύνουν το μυαλό». Τι είναι όμως αυτό που οξύνει το μυαλό, η εξάσκηση στη χρήση των διαφόρων τεχνικών ή η κατανόηση της «λογικής» των σχέσεων;

Ένα βασικό πρόβλημα που πρέπει ν' αντιμετωπιστεί είναι η οργανική σύνθεση της διδασκαλίας των διαφόρων κλάδων των Μαθηματικών, έτσι ώστε ν' αποτελέσουν ένα σύνολο με εσωτερική συνοχή που θα μπορεί να χρησιμοποιείται σαν εργαλείο για τη μελέτη του περιβάλλοντος.

Παράλληλα, πρέπει ν' ασχοληθούμε και στη χώρα μας σοβαρά με το πρόβλημα της διδασκαλίας. Με ποιούς τρόπους μαθαίνει το παιδί σε κάθε ηλικία; (Μας είναι ουσιαστικά άγνωστοι οι μέθοδοι διδασκαλίας που έχουν αναπτυχθεί σ' όλο τον κόσμο μετά το 1900). Αλλά και πιο ειδικά: πώς θα διδάξουμε το κάθε κεφάλαιο;

Κι αν στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης φαίνεται πως σήμερα ίσως μπήκαν (μακροπρόθεσμα) οι βάσεις, με την προβλεπόμενη «ανωτατοποίηση» των Παιδαγωγικών Ακαδημιών, τι γίνεται με τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση; Ως πότε θ' αναλαμβάνουν να διδάξουν τα παιδιά καθηγητές που δεν άκουσαν ούτε μια λέξη για το πώς πρέπει να διδάξουν; Γιατί δεν

4. J. Bruner, *Η διαδικασία της Παιδείας* (Εκδόσεις Καραβία, Αθήνα).

χωρίζονται οι Φυσικομαθηματικές (τουλάχιστο) σχολές σε σχολές από τις οποίες θα βγαίνουν καθηγητές για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και σε σχολές από τις οποίες θα βγαίνουν επιστήμονες που θ' ασχοληθούν με την έρευνα ή την παραγωγή; (Τι σχέση έχουν μεταξύ τους αυτές οι κατηγορίες επιστημόνων;). Πότε επιτέλους θα κατανοήσουμε πως η δουλειά του σημερινού δασκάλου (σ' οποιαδήποτε βαθμίδα) απαιτεί πολύ μεγάλα επιστημονικά (στην Παιδαγωγική και στη Διδακτική) εφόδια, παράλληλα με την «αποστολική» διάθεση διακονίας;

Τέλος, το πιο δύσκολο πρόβλημα είναι να καθοριστεί το επίπεδο προσέγγισης των Μαθηματικών που είναι απαραίτητο σε κάθε βαθμίδα της εκπαίδευσής μας. Τα παδιά μεγαλώνουν σ' έναν κόσμο μεταβαλλόμενο με μεγάλη ταχύτητα. Οι ανάγκες του αύριο σίγουρα δεν θα είναι ίδιες με τις ανάγκες του σήμερα και είναι δύσκολο να τις προβλέψουμε. Η εκπαίδευση όμως πρέπει να ετοιμάσει τα παιδιά για τον κόσμο του αύριο.

Εκείνο λοιπόν που μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα για τις «στατιστικές αποτυχίας» είναι πως φανερώνουν μόνο τη μέχρι σήμερα αποτυχία της εκπαίδευσής μας στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Ο Πολίτης, τεύχος 22, Νοέμβριος 1978